Siempre Día-E

La ruta hacia la excelencia educativa

DERECHOS BÁSICOS

DE APRENDIZAJE

MINEDUCACIÓN

Día E

TODOS POR UN NUEVO PAÍS

PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Ministra de Educación
Gina Parody D'Echeona

Viceministro de Educación Preescolar, Básica y Media
Luis Enrique García de Brigard

Directora de Calidad de Educación Preescolar, Básica y Media:
Laura Barragán Montaña

Subdirectora de Fomento de Competencias
Paola Andrea Trujillo Pulido

Subdirectora de Referentes y Evaluación
Ana Bolena Escobar

Coordinadora Equipo Técnico
María Figueroa

Equipo pedagógico matemáticas
Veronica Mariño Salazar
Enrique Acosta Jaramillo
María Margarita Botero de Mesa
Francy Paola González Castelblanco
Yadira Sanabria Mejia
Yerry Londoño Morales
Jenny Blanco Guerrero

Equipo pedagógico lenguaje
Angela María Cubillos León
Grace Shakira Díaz Mejía
Jenny Patricia Niño Rodríguez
Inés Cristina Torres Londoño
Angela María Márquez de Arboleda

Equipo revisor
Juan Pablo Aldabán Vargas
Horacio Alvarez Marinelli
Sandra Patricia Arévalo Ramirez
Gina Caicedo Bohorquez
Martha Liliana Jimenez Cardona
Luz Mery Medina Medina
Sebastián Moncaleano Medina
Angela María Prada Echeverri
Ángela María Restrepo Santamaría
Ana María Saavedra Pineda
Betsy Vargas Romero

Diagramación
Heidy Rodriguez Amaya
Ángela María Mejía
BANCA DE PROYECTOS
Directores gráficos
Mario Roabarrera
Alejandro Ramirez Villaneda

Presentación

El Ministerio de Educación Nacional ha venido trabajando en distintas estrategias y herramientas que conlleven al mejoramiento de la calidad educativa del país y que sean útiles en los establecimientos educativos. Una de estas herramientas son los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) dirigidos a todos los actores del sector educativo para que identifiquen lo que es indispensable que aprendan los estudiantes y se desarrollen las acciones que sean necesarias para garantizarlo. Éstos tienen como finalidad presentar al país un conjunto de aprendizajes fundamentales, alineados con los Estándares Básicos de Competencias, que pueden utilizarse como base para el diseño de programas de estudio coherentes, secuenciados y articulados en todos los grados y que a su vez, tengan en cuenta las particularidades de la comunidad educativa como la diversidad cultural, étnica, geográfica y social.

El Ministerio de Educación Nacional espera que los Derechos Básicos de Aprendizaje de 1º a 11º sean una herramienta útil para la comunidad educativa; las Entidades Territoriales podrán tomarlo como un referente que les permita construir sus propias iniciativas curriculares, las instituciones educativas usarlo en la elaboración de sus planes de área, los docentes desarrollar ejercicios de planeación y prácticas de aula, los estudiantes podrán dar más sentido a sus procesos de aprendizaje y los padres de familia, facilitar el acompañamiento de la formación de sus hijos en casa.

De este modo, el Ministerio de Educación Nacional a través de esta primera versión de los Derechos Básicos de Aprendizaje, inicia un proceso de socialización y retroalimentación con la comunidad educativa acerca de lo básico que aprenden los estudiantes del país para mejorar sus aprendizajes grado a grado. Los Derechos Básicos de Aprendizaje son un documento dinámico que será retroalimentado, para seguir trabajando como comunidad comprometida en lo que queremos sea una educación de calidad para nuestros niños, niñas y jóvenes.

Gina Parody D'Echeona.

Introducción

¿Qué son los Derechos Básicos de Aprendizaje?

Son un conjunto de saberes fundamentales dirigidos a la comunidad educativa que al incorporarse en los procesos de enseñanza promueven condiciones de igualdad educativa a todos los niños, niñas y jóvenes del país.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje se plantean para cada año escolar de grado primero a grado once, en las áreas de lenguaje y matemáticas y se han estructurado en concordancia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). En ese sentido, plantean una posible ruta de aprendizajes para que los estudiantes alcancen lo planteado en los EBC para cada grupo de grados. Los DBA por sí solos no constituyen una propuesta curricular puesto que estos son complementados por los enfoques, metodologías, estrategias y contextos que se definen en los establecimientos educativos, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales y se concretan en los planes de área.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje:

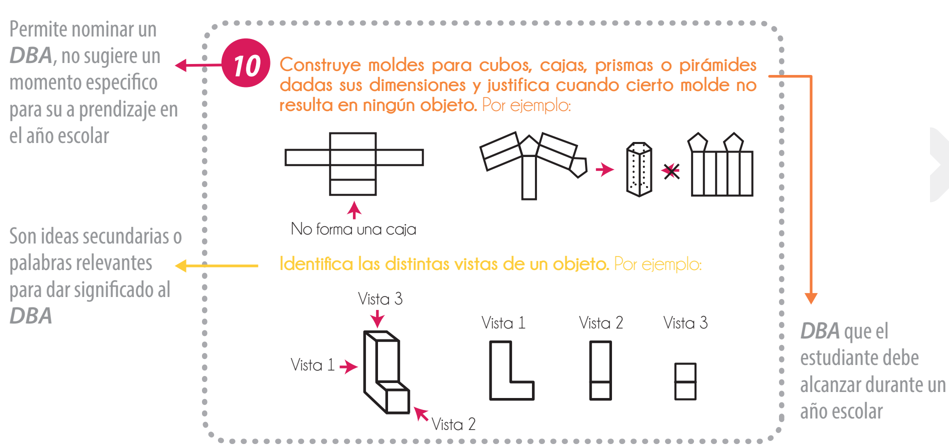
Son una selección de saberes claves que indican lo que los estudiantes deben aprender en cada grado escolar desde 1º hasta 11º para las áreas de lenguaje y matemáticas.

- Dan cuenta del desarrollo progresivo de algunos conceptos a lo largo de los grados.
- Presentan ejemplos para aclarar los enunciados. Estos ejemplos no se plantean como actividades que los docentes deban realizar en sus aulas de clase.
- Son referentes para la planeación de aula. De esta manera, las actividades en el aula pueden e idealmente pueden involucrar varios DBA de un grado, para que estos se alcancen gradualmente a lo largo del grado.

¿Cómo se estructuran?

Para cada grado se cuenta con un listado de Derechos Básicos de Aprendizaje por área

(Lenguaje y matemáticas). Cada Derecho de aprendizaje se estructura de la siguiente manera:



El ejemplo ilustra lo que se espera que el estudiante pueda realizar una vez ha aprendido el DBA

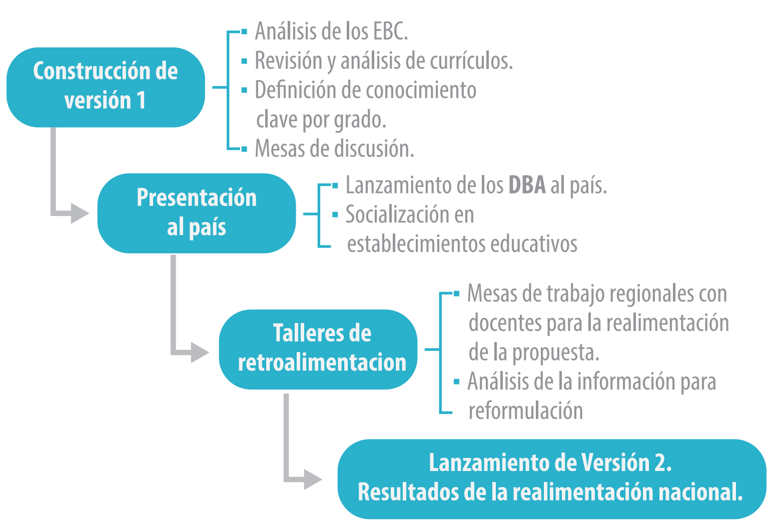
¿A quién están dirigidos?

Los DBA son una herramienta que el MEN pone a disposición de toda la comunidad educativa:

- A las Entidades territoriales, les proporciona un referente que les permite lanzar iniciativas curriculares adaptadas a las necesidades de sus Establecimientos Educativos.
- A los establecimientos educativos, les plantea un ejemplo de ruta, que puede servir de referencia para articular sus planeaciones de área y aula por grados y niveles.
- A los docentes y directivos docentes, les muestra un ejemplo de ruta para los grados de educación básica y media, que pueden ser referentes para sus procesos de diseño curricular, de área y de aula.
- A las familias, les permite identificar e interpretar los aprendizajes que están o no alcanzando sus estudiantes en el proceso escolar para generar acciones de acompañamiento desde casa, así como involucrarse las decisiones de las escuelas de sus hijos.
- A los estudiantes les brindan información sobre lo que debe aprender en el año escolar y en cada grupo de grados para orientar sus procesos de estudio personal y prepararse en algunos conocimientos que evalúan las pruebas de estado y de acceso a educación superior.
- Al Ministerio de Educación, fundaciones y otras entidades les permite generar estrategias acordes y que garanticen lo que se espera que los estudiantes aprendan para las áreas de lenguaje y matemáticas durante su permanencia en el sistema escolar.

¿Cuál es su proceso de construcción y cómo se puede vincular?

El Ministerio de Educación Nacional, propone esta primera versión de los DBA como un documento de trabajo que será socializado con la comunidad educativa por medio de talleres de realimentación con establecimientos educativos y espacios de interacción en el Edusitio Currículos para la Excelencia http://www.colombiaaprende.edu.co/curriculo, que permitan consolidar una versión definitiva. El camino a recorrer en esta construcción colaborativa es el siguiente:



Actualmente se está adelantando el proceso de presentación al país. El Ministerio de Educación Nacional le invita a hacerse participe en este proceso de construcción nacional, a conocer los los DBA y a dar a conocer sus iniciativas y recomendaciones para enriquecer esta propuesta.

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS

Siempre Día-E

La ruta hacia la excelencia educativa

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS – GRADO 1

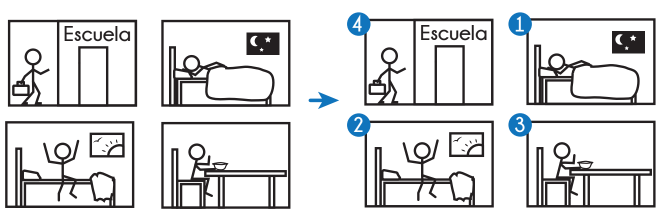
1 Sabe contar de 0 a 99 empezando en cualquier parte (por ejemplo, 17, 18, 19, 20, 21, ...); **También contar de dos en dos, o de diez en diez** (por ejemplo, 0, 2, 4, 6, ...); **Si ve un número puede decir su nombre, y si escucha el nombre del número lo puede escribir** (con números); Sabe escribir los números del 0 al 9 con letras (por ejemplo, sabe que "7" y "siete" se refieren a lo mismo).

2 Puede determinar cuántos elementos hay en una colección de menos de 100 elementos; Si le dan un número sabe cuál número va antes y cuál va después (por ejemplo, sabe que antes del 60 va el 59 y después del 60 va el 61); **Si se le dan dos números sabe cuál es mayor y cuál es menor** (por ejemplo, sabe que 42 es mayor que 24).

Usa correctamente palabras como "primero", "segundo", etc.

3 Puede numerar una secuencia de eventos en el tiempo. Por ejemplo:

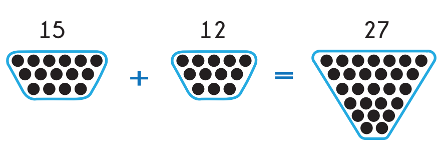
Lunes antes de ir a la escuela

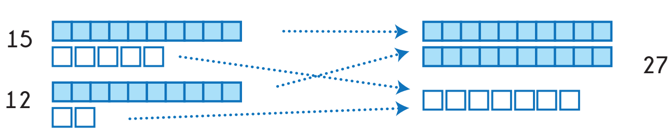


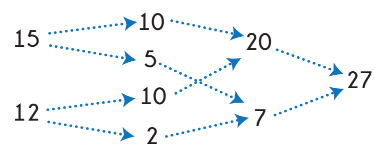
Usa palabras como antes/después para referirse a dos eventos en el tiempo (por ejemplo, "después de levantarse el niño desayuna" o "antes de ir a la escuela el niño desayuna").

4 Resuelve distintos tipos de problemas sencillos que involucren sumas y restas con números de 0 a 99. Por ejemplo:

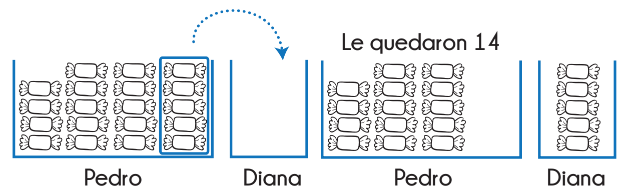
- Ana tiene 15 lápices y Juan tiene 12 lápices, ¿cuántos lápices tienen entre los dos?







- Pedro tiene 19 dulces y le regala 5 dulces a Diana, ¿cuántos dulces le quedan a Pedro?.



Comprende el significado de los símbolos "=", "+" y "–". Por ejemplo, entiende que la primera situación puede escribirse como 15 + 12 = 27 y que la segunda puede escribirse como 19 – 5 = 14.

5 Reconoce características en objetos (como color, forma, tamaño, longitud, edad, deporte, peso) y los clasifica a partir de estas particularidades. Por ejemplo, si se le dan muchos juguetes y varias cajas, **puede separar los objetos en grupos** y explicar las razones por las cuales determinadas cosas van juntas. También puede determinar qué caja contiene más objetos.

Juguetes de animales: Mariposa, perro, lombriz, cóndor, tiburón y burro.

Con patas	Sin patas
Mariposa Cóndor Perro Burro	Lombriz Tiburón

o

Pequeño	Mediano	Grande
Mariposa Lombriz	Perro Cóndor	Burro Tiburón

6 **Reconoce en su entorno formas geométricas sólidas** **(como conos, cilindros, esferas o cubos) y formas planas básicas (como triángulos, cuadrados o círculos).**

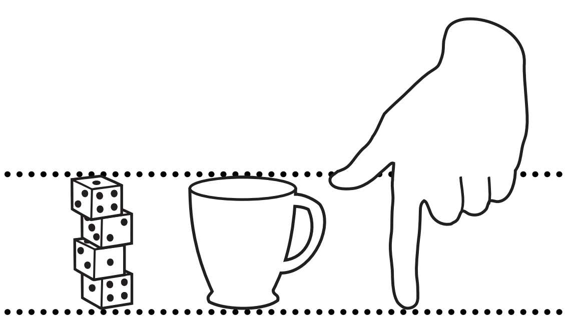
Cono Cubo Cilindro Esfera

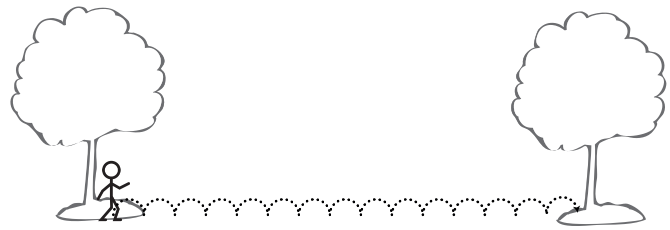
Clasifica y organiza formas de acuerdo a sus características. Por ejemplo:

- Los cilindros, las esferas, y los conos ruedan; en cambio los cubos no.
- Si se le dan muchas esferas (muchas pelotas), las puede organizar de acuerdo a su tamaño.

7 **Utiliza los meses del año y los días de la semana para especificar momentos en el tiempo.** Por ejemplo, "En junio salimos a vacaciones" o "El sábado fui al parque".

8 **Mide el largo de objetos o trayectos con unidades no estándar** (como palos, manos, pasos, etc.) sin utilizar ni fraccionarios ni decimales. Por ejemplo: "La distancia entre esos dos árboles es de 15 pasos" o "La altura de esa taza es 4 dados" o "La altura de esa taza es un dedo".



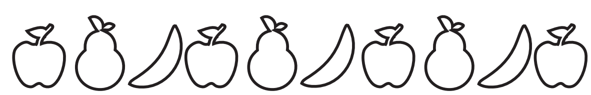


9 **Comunica la posición de un objeto con relación a otro o con relación a sí mismo utilizando las palabras arriba /abajo, detrás / delante, dentro / fuera, izquierda / derecha, entre otros.** Por ejemplo:

- Si se le dice "Hay una caja encima de la mesa. Mete tus zapatos dentro de la caja.", puede guardar sus zapatos en dónde se le indica.
- Puede explicar dónde está cierto objeto: "La pelota está detrás de mí".

10 **Reconoce y propone patrones simples con números, ritmos, o figuras geométricas.** Por ejemplo:

En la serie

 ___

Descubre que el patrón es "manzana, pera, banano" y deduce así que la siguiente figura es una **pera.**

En la serie

6, 8, 10, 12, 14, ____

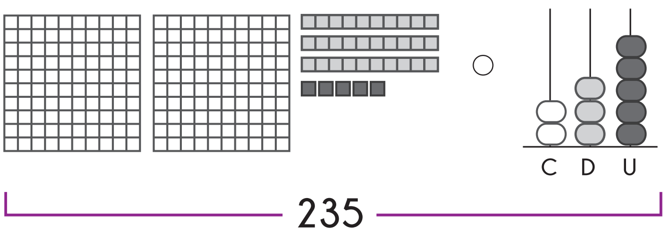
Descubre que el patrón es "sumar 2" y deduce que el siguiente término es **16.**

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS – GRADO 2

1 **Sabe contar de 0 a 999** empezando en cualquier parte (por ejemplo: 197, 198, 199, 200, 201, ...); También puede contar de dos en dos, de cinco en cinco, o de diez en diez (por ejemplo: 0, 5, 10, 15, ...); **Si ve un número puede decir su nombre, y si escucha el nombre del número lo puede escribir (con números); Sabe escribir los números del 0 al 99 con letras** (por ejemplo, sabe que "65" y "sesenta y cinco" se refieren a lo mismo).

2 **Tiene claro el concepto de unidad, decena, y centena.** Por ejemplo, en 235 hay 2 centenas, 3 decenas y 5 unidades; es decir, 235 = 200 + 30 + 5.



Si le dan un número sabe cuál número va antes y cuál va después (por ejemplo, sabe que antes del 800 va el 799 y después del 800 va el 801); **Si le dan dos números sabe cuál es mayor y cuál es menor** (por ejemplo, sabe que 412 es mayor que 379).

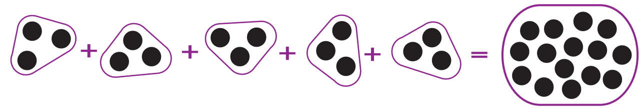
3 **Resuelve distintos tipos de problemas que involucren sumas y restas** con números de 0 a 999, utilizando materiales concretos o haciendo dibujos. Por ejemplo:

- María recolectó **128** semillas y Mateo recolectó **296** semillas, ¿cuántas semillas recolectaron entre los dos?.
- Jorge tiene que caminar **457** metros de su casa a la escuela. Ha caminado **90** metros, ¿cuántos metros le faltan para llegar?

4 **Ordena objetos y/o eventos de acuerdo a su longitud, distancia, área, capacidad, peso, duración, etc.** Por ejemplo: dados tres recipientes distintos, los puede organizar del de menor capacidad al de mayor capacidad, o del más bajito al más alto, o del menos pesado al más pesado, etc.

5 **Comprende que multiplicar por un número corresponde a sumar repetidas veces.** Por ejemplo:

3 + 3 + 3 + 3 + 3 15



5 veces **3** se escribe **5 x 3**

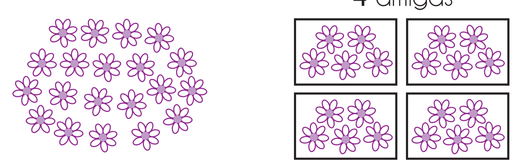
5 x 3 = 15

Nota: También se sabe las tablas de multiplicar de 0 a 10.

6 **Puede hacer repartos equitativos.** Por ejemplo:

- Juana reparte **20** flores entre sus **4** amigas, ¿cuántas flores recibe cada una?

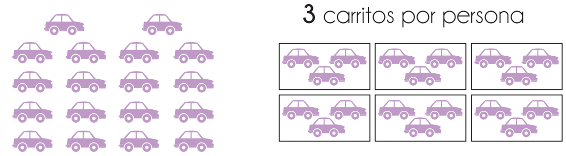
4 amigas



20 flores | **5 flores** para cada una

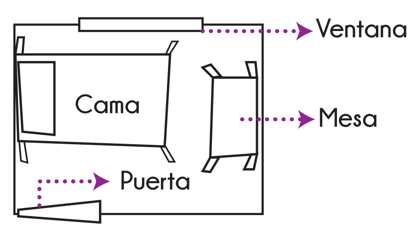
- José tiene **18** carritos y le regala **3** carritos a cada persona, ¿cuántas personas reciben carritos?

3 carritos por persona



18 carritos | **6 personas** reciben carritos

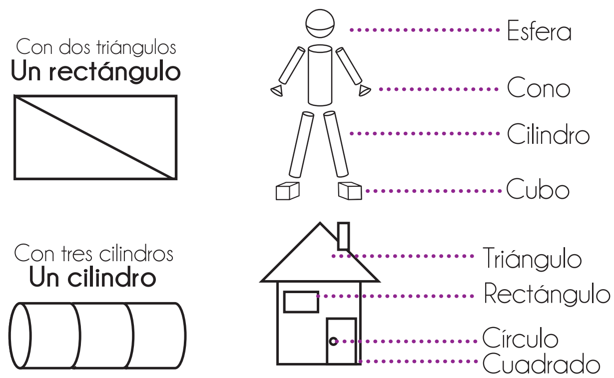
7 **Puede hacer dibujos sencillos donde representa un lugar y la posición** de los objetos en ese lugar. Por ejemplo,



DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

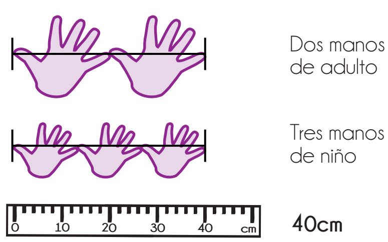
•• MATEMÁTICAS – GRADO 2 ••

8 Reconoce figuras planas y sólidas simples **(como triángulos, rectángulos, esferas, cilindros, cubos, conos)**, las describe de acuerdo a sus características (como número de lados, caras curvas o planas) y **utiliza estas figuras para formar figuras más complejas.** Por ejemplo:



9 Utiliza direcciones y unidades de desplazamiento para especificar posiciones. Por ejemplo: "Para llegar a la tienda, cruce a la izquierda y camine dos cuadras".

10 Mide el largo de objetos o trayectos con unidades estándar **(metros, centímetros)** y no estándar **(paso, pie, dedo)** sin fracciones ni decimales. **Entiende la ventaja de usar unidades estándar** (¿Cuántas manos mide? Depende del tamaño de la mano.).

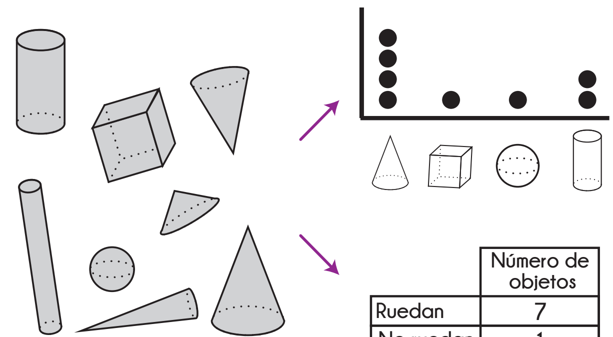


Realiza también estimaciones del área de una figura por medio de recubrimientos. Por ejemplo, para calcular el área de una mesa, puede recubrirla con hojas de papel.

Área de la mesa:
12 hojas de papel (12 unidades de área).

11 Sabe leer la hora en relojes digitales y de manecillas.

12 Representa de forma gráfica grupos de objetos de acuerdo a cierta característica. Por ejemplo:



	Número de objetos
Ruedan	7
No ruedan	1

13 Reconoce y propone patrones simples con números, ritmos o figuras geométricas. Por ejemplo:

- En la serie

descubre que el patrón es "gris, gris, gris, blanco" y deduce así que la siguiente figura es un cuadrado **gris.**

- En la serie

___ , 60, 55, 50, 45, 40, ___

Descubre que el patrón es **"restar 5"** y deduce que el término anterior es **65** y que el siguiente término es **35**.

14 Comprende nociones como **horizontal / vertical / paralelo / perpendicular.**

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 3 ••

1 Usa números de 0 a 999 999. **Tiene claro el concepto de unidad, decena, centena, etc.** Por ejemplo, entiende que en 3 785 hay 3 unidades de mil, 7 centenas, 8 decenas y 5 unidades; es decir, 3 785 = 3 000+700+80+5. También entiende otras alternativas, como: en 3 785 hay 37 centenas y 85 unidades; es decir 3 785=3 700+85, o en 3 785 hay 3 785 unidades. **Si le dan dos números sabe cuál es mayor y cuál es menor.**

2 Resuelve distintos tipos de problemas que involucren sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Por ejemplo:

- Ana tiene 14 500 pesos y Juan tiene 8 300 pesos, ¿cuántos pesos **menos** tiene Juan?

  Respuesta: Juan tiene 6 200 pesos menos que Ana.

- Diego tiene 8 caramelos **más** que Laura. Diego tiene 34 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Laura?

  Respuesta: Laura tiene 26 caramelos.

- La señora Carmen compró una blusa. Pagó con un billete de 10 000 pesos y con uno de 2 000 pesos y no le dieron vueltas. ¿Cuánto dinero le devolverían a la señora Carmen, si hubiera pagado con un billete de $20 000?

  Respuesta: Le devolverían 8 000 pesos.

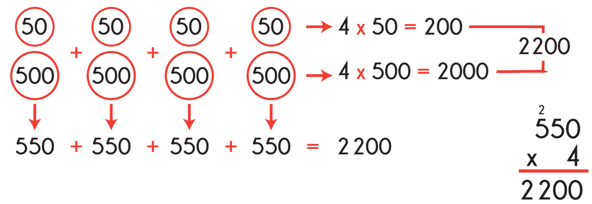
- En la escuela hay 6 grupos de 30 estudiantes. De cada grupo se van 2 estudiantes a las olimpiadas. ¿Cuántos estudiantes quedan en la escuela?

  Respuesta: Quedan 168 estudiantes.

3 Entiende que dividir corresponde a hacer repartos equitativos. **Divide números de hasta tres cifras entre un número de una cifra** en casos simples en los que se puede hacer un reparto equitativo sin que sobre nada. Por ejemplo:

- Para repartir 56 fichas entre 7 personas de tal forma que cada persona reciba la misma cantidad y no sobre ninguna, **divide 56 entre 7** (56÷7 = 8) y **comprende que a cada persona le corresponden 8 fichas.**

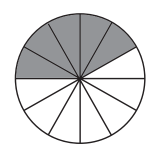
4 Multiplica números de hasta tres cifras por un número de una cifra utilizando diversas estrategias. Por ejemplo, 4×550:



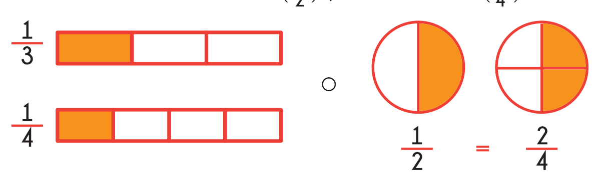
5 Comprende la relación entre la multiplicación y la división. Por ejemplo: Para encontrar 32÷8, encuentra el número que al ser multiplicado por 8 da 32.

$$32 \div 8 = \square \quad \longrightarrow \quad \square \times 8 = 32$$

6 Comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales. Por ejemplo, 5 porciones de una torta partida en 12 pedazos iguales corresponden a cinco doceavos de torta.

Cinco de doce  $\frac{5}{12}$ Cinco doceavos

7 Compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que aunque se vean distintas, representan la misma cantidad como un medio ($\frac{1}{2}$) y dos cuartos ($\frac{2}{4}$)



$\frac{1}{3}$ es más **grande** que $\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ es **igual** a $\frac{2}{4}$

8 Comprende el significado de la igualdad y utiliza el símbolo " = " de forma correcta. Por ejemplo

$5 = 5 \qquad 6 + 7 = 10 + 3 \qquad \frac{4}{4} = 1$

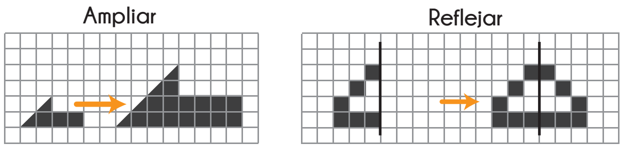
MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

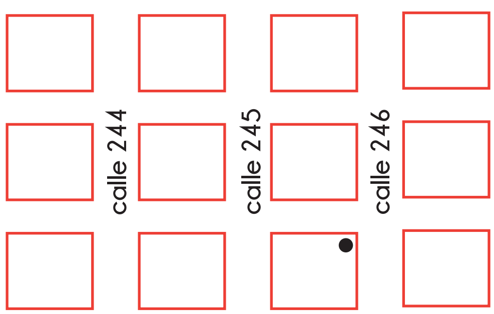
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 3 ••

9 **Puede ampliar o reducir figuras en una cuadrícula; identifica figuras y objetos simétricos** en contextos como la geometría, el arte, el diseño y la naturaleza; Hace dibujos con ejes de simetría. Por ejemplo:

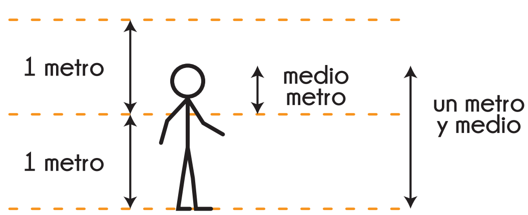


10 **Ubica lugares en mapas y describe trayectos.** Por ejemplo, ubica la iglesia en una esquina de la calle 244 con la carrera 18, y describe distintas formas de llegar del punto negro a la iglesia.



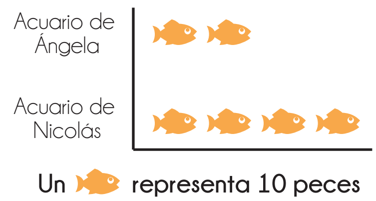
11 **Mide y estima longitud, distancia, área, capacidad, peso, duración, etc., en objetos y/o eventos.** Por ejemplo:

Mide la capacidad de un balde usando una taza y concluye "La capacidad del balde es de casi 23 tazas", o mide la altura de su hermano usando un metro y concluye "Mi hermano mide un metro y medio".



Identifica qué instrumentos de medición debe utilizar según el caso (una balanza para el peso, una regla para la longitud, un reloj para el tiempo, etc.).

12 **Interpreta y representa datos dados de diferentes maneras.** Por ejemplo:

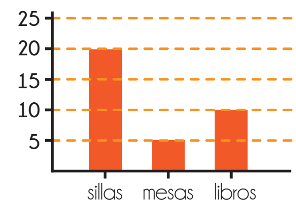


→

	Número de peces
Ángela	20
Nicolás	40

objeto	cantidad
sillas	20
mesas	5
libros	10

→



Responde a preguntas como ¿Cuál objeto de los que hay en el salón tiene mayor número de unidades: sillas, mesas o libros?

13 **Usa correctamente las expresiones posible, imposible, muy posible y poco posible.** Por ejemplo, "Es **imposible** obtener 18 al lanzar un dado una vez" o "Si en la clase hay 3 niñas y 20 niños, es **poco posible** que una niña se gane la rifa".

14 **Puede describir variaciones.** Por ejemplo: Si escucha una canción puede decir algo como "Al final, el volumen fue bajando" o "El ritmo va cada vez más rápido".

15 **Reconoce y propone patrones con números o figuras geométricas.** Por ejemplo:

- En la serie

3, 6, 12, 24, 48, 96, ___

Descubre que el patrón es **"multiplicar por 2"** y deduce que el siguiente término es 192.

- En la serie

 ___

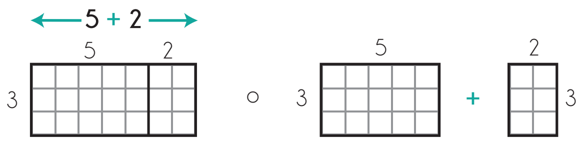
deduce que la siguiente figura es un cuadrado así: 

MINEDUCACIÓN
TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS – GRADO 4

1 **Conoce los números naturales: 0, 1, 2, ... Realiza operaciones entre ellos** (sumas; restas; multiplicaciones de números de máximo 4 cifras por una cifra o de tres cifras por dos cifras; divisiones de números de máximo 4 cifras entre una cifra). **Comprende algunas de sus propiedades.** Por ejemplo, entiende que 73×19 = 19×73, o que 3×(5 + 2) = (3×5) + (3×2).



3 x (5 + 2) — 3 x 7 — 21 cuadritos

(3 x 5) 15 y (3 x 2) 6 — 21 cuadritos

2 **Entiende los conceptos de múltiplos y divisores.** Por ejemplo, puede listar todos los divisores de 12 y sus primeros múltiplos:

Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6 y 12

Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, etc.

3 **Comprende que el residuo en una división corresponde a lo que sobra al efectuar un reparto equitativo.** Por ejemplo:

Al dividir 32 entre 3 (32÷3) se obtiene un residuo de 2. Igualmente, si se reparten 32 manzanas entre 3 personas de manera equitativa, cada persona recibe 10 manzanas y sobran 2.

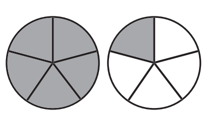
$$32 = (3 \times 10) + 2$$

4 **Comprende la relación entre fracción y decimal.** Por ejemplo:

$$23{,}8 = 23 + 0{,}8 = 23 + \frac{8}{10} = 23\frac{8}{10} = \frac{238}{10}$$

Representa fracciones y decimales de distintas formas de acuerdo al contexto. Por ejemplo, $\frac{6}{5}$ puede representarse así:

$\frac{6}{5}$ **de pizza:**

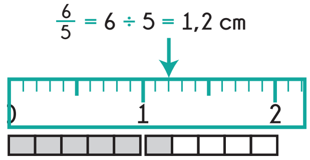


Una pizza y $\frac{1}{5}$ de pizza

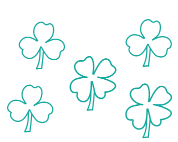
$\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

$\frac{6}{5}$ **de centímetro:**

$\frac{6}{5} = 6 \div 5 = 1{,}2$ cm



Comprende que las fracciones sirven para referirse a una parte de una colección de objetos. Por ejemplo:



$\frac{3}{5}$ de los tréboles tienen 3 hojas (3 de 5)

$\frac{2}{5}$ de los tréboles tienen 4 hojas (2 de 5)

5 **Identifica fracciones equivalentes y simplifica fracciones.** Por ejemplo:

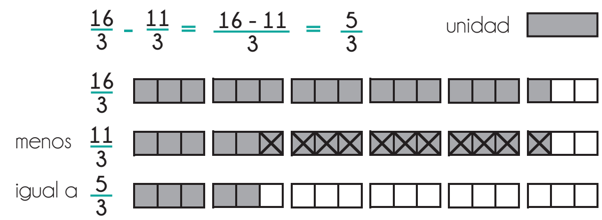
$$\frac{4}{18} \xrightarrow{\times 3} \frac{12}{54} \qquad \frac{4}{18} \xrightarrow{\div 2} \frac{2}{9}$$

Simplificar: $\frac{120}{180} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

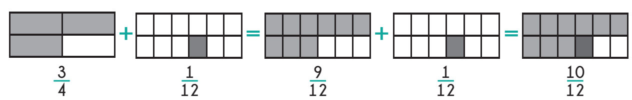
6 **Realiza sumas y restas de fracciones** (utilizando estrategias que muestran comprensión y no sólo memorización de un procedimiento) en los siguientes casos:

- Cuando tienen el mismo denominador. Por ejemplo:

$$\frac{16}{3} - \frac{11}{3} = \frac{16-11}{3} = \frac{5}{3}$$



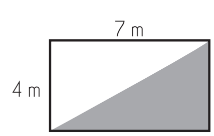
- Cuando uno de los denominadores es múltiplo del otro. Por ejemplo: En $\frac{3}{4}$ del terreno se sembró fresa y en $\frac{1}{12}$ del terreno se sembró ajo. El resto del terreno se dejó sin sembrar. ¿Qué parte del terreno está sembrado?



$$\frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{?}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9+1}{12} = \frac{10}{12}$$

$\frac{10}{12}$ del terreno están sembrados

7 **Calcula el área y el perímetro de un rectángulo a partir de su base y su altura** usando números naturales, decimales o fraccionarios; calcula el área de otras figuras a partir del área de rectángulos. Por ejemplo: La bandera del equipo es de 4 metros por 7 metros. Es mitad blanca y mitad gris. Al rededor tiene una cinta negra. ¿Cuál es el área de la bandera? ¿Cuántos metros cuadrados de tela gris se usaron? ¿Cuántos metros de cinta negra se usaron?



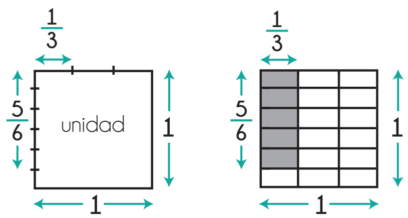
- Cinta negra (perímetro del rectángulo): 4 m + 7 m + 4 m + 7 m = 22 m
- Área de la bandera (área del rectángulo): 4 m x 7 m = 28 m^2
- Tela gris (área de la región gris): $\frac{4 \text{ m} \times 7 \text{ m}}{2} = \frac{28 \text{ m}^2}{2} = 14 \text{ m}^2$

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

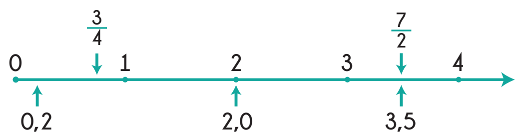
8 **Multiplica fracciones** utilizando estrategias que muestran comprensión y no sólo memorización de un procedimiento. Por ejemplo:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5 \times 1}{6 \times 3} = \frac{5}{18}$$



$\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ cinco de dieciocho

9 **Reconoce fracciones y números decimales positivos** (con una sola cifra despúes de la coma) en forma oral, escrita o con dibujos. **Compara números naturales, fracciones y números decimales positivos.** Por ejemplo, ubica en la recta numérica los números 0,2 2,0 3,5 $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{2}$:

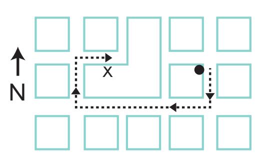


10 **Reconoce y utiliza porcentajes sencillos** (0%, 25%, 50%, 75% y 100%). Entiende que 25% corresponde a una cuarta parte ($\frac{1}{4}$); 50% corresponde a la mitad ($\frac{1}{2}$); 75% corresponde a tres cuartas partes ($\frac{3}{4}$); y 100% corresponde a la totalidad. Por ejemplo: Vicente, que quiere comprar unos zapatos de $40 000, espera hasta que tengan un descuento de 25%. ¿Cuánto paga entonces?

El descuento: 25 % de \$40 000 = $\frac{1}{4}$ x \$40 000 = \$10 000

Paga: \$40 000 - \$10 000 = \$30 000

11 **Usa los términos norte / sur / oriente / occidente para describir desplazamientos en un mapa.** Por ejemplo:

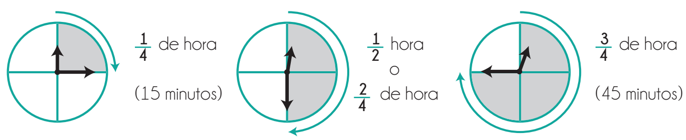


Para ir del punto a la cruz, Verónica camina primero una cuadra hacia el sur.

Luego camina tres cuadras hacia el occidente.

Luego camina una cuadra hacia el norte, y finalmente, camina menos de una cuadra hacia el oriente.

12 **Realiza mediciones con unidades de medida estándar de:** longitud (metros, centímetros, etc), masa (gramo, kilogramo, etc), área (centímetros cuadrados, etc), capacidad (litros, galones, etc) y tiempo (segundos, minutos, etc), usando números naturales, fraccionarios y números decimales. Por ejemplo: "Mi pie mide 21,3 centímetros", "Este paquete pesa 3,7 kilogramos" o "Empecé mi tarea a medio día y me demoré $\frac{3}{4}$ de hora haciéndola."

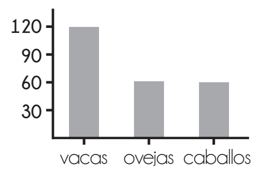


13 **Describe cómo se vería un objeto desde distintos puntos de vista.** Por ejemplo:

14 **Clasifica polígonos según sus lados y sus ángulos.** Por ejemplo, si le dan varios cuadriláteros los clasifica como rectángulos, cuadrados, trapecios, etc.

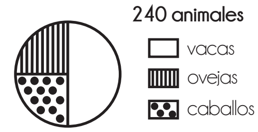
15 **Usa el transportador para medir ángulos y los clasifica dependiendo de si son mayores o menores a un ángulo recto (90°)**; asocia giros de una, media y un cuarto de vuelta a 360°, 180° y 90° respectivamente. Entiende expresiones como "Mi vida dio un giro de 180°".

16 **Entiende unos datos representados de cierta forma y los representa de otra.** Por ejemplo:



Animal	Cantidad
vacas	120
ovejas	60
caballos	60

240 animales
50% vacas
25% ovejas
25% caballos

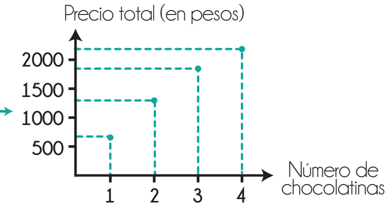


240 animales
La mitad (1/2): vacas
Una cuarta parte (1/4): ovejas
Una cuarta parte (1/4): caballos

17 **Interpreta y representa datos descritos** como puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano. Por ejemplo:

PROMOCIÓN:

Número de chocolatinas	Precio total (en pesos)
1	700
2	1300
3	1800
4	2200



A partir de los datos concluye cosas como "Si compro 3 chocolatinas pago 1 800 pesos y cada chocolatina me cuesta 600 pesos."

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS – GRADO 5

1 **Usa números decimales de hasta tres cifras después de la coma** teniendo claro el concepto de décima, centésima y milésima. Por ejemplo: en 932,746 hay 9 centenas, 3 decenas, 2 unidades, 7 décimas, 4 centésimas y 6 milésimas.

$$932{,}746 = (9 \times 100) + (3 \times 10) + 2 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1000}$$

También entiende que en 932,746 hay 932 unidades y 746 milésimas.

$$932{,}746 = 932 + \frac{746}{1000}$$

Multiplica y divide por 10, 100, 1000, etc. por escrito y mentalmente. Por ejemplo:

$$\frac{31{,}04}{1000} = 0{,}03104 \qquad \frac{31{,}04}{100} = 0{,}3104 \qquad \frac{31{,}04}{10} = 3{,}104$$

$$31{,}04 \times 10 = 310{,}4 \qquad 31{,}04 \times 100 = 3104 \qquad 31{,}04 \times 1000 = 31040$$

2 **Resuelve problemas que involucran sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números decimales.** Por ejemplo:

- El año pasado, la campeona regional de lanzamiento de jabalina logró un récord de 62,8 metros. Este año la campeona sólo logró una marca de 62,32 metros. ¿Cuántos metros le faltaron para alcanzar el récord?

$$62{,}8\text{ m} - 62{,}32\text{ m} = 62{,}80\text{ m} - 62{,}32\text{ m} = 0{,}48\text{ m} = 48\text{ cm}$$

Le faltaron 48 centímetros, es decir, 0,48 metros.

- Don Adolfo recibe 8 bolsas de arroz de 7,4 kilogramos cada una. Mezcla todo el arroz y luego lo reparte en cinco paquetes iguales. ¿Cuántos kilogramos pesa cada paquete?

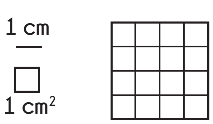
$$8 \times 7{,}4\text{ kg} = 59{,}2\text{ kg} \quad \text{y} \quad 59{,}2\text{ kg} \div 5 = 59{,}20\text{ kg} \div 5 = 11{,}84\text{ kg}$$

Cada paquete pesa 11,84 kilogramos.

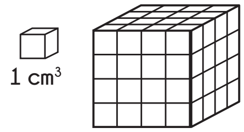
3 **Comprende que elevar un número a una cierta potencia corresponde a multiplicar repetidas veces el número.** Comprende la relación entre la raíz cuadrada y elevar al cuadrado, la raíz cúbica y elevar al cubo, etc. Por ejemplo:

- $8^2 = 8 \times 8 = 64$ y $\sqrt{64} = 8$ pues $8^2 = 64$
- $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ y $\sqrt[4]{81} = 3$ pues $3^4 = 81$

Asocia las potencias cuadradas con el área de un cuadrado (área = (lado)^2), **y las potencias cúbicas con el volumen de un cubo** (volumen = (lado)^3). Por ejemplo:



Área = $(4\text{ cm})^2$ = $4\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$



Volumen = $(4\text{ cm})^3$ = $4\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 64\text{ cm}^3$

En un cuadrado de 4 cm de lado caben 16 cuadritos de 1 cm^2. En un cubo de 4 cm de lado caben 64 cubitos de 1 cm^3.

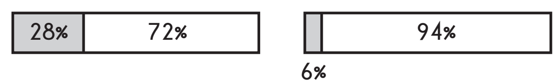
4 **Puede estimar el resultado de un cálculo sin necesidad de calcularlo con exactitud.** Por ejemplo: El colegio tiene 8 salones y en cada salón hay 32 estudiantes. ¿Aproximadamente cuántos estudiantes hay en el colegio?

Para obtener la cifra exacta calcula 32×8. Sin embargo, para estimar el valor, calcula mentalmente 30×8 = 240 y 35×8 = 70×4 = 280 y concluye que el número de estudiantes está entre 240 y 280.

5 **Escribe fracciones como decimales y viceversa. Identifica la fracción como una división. Escribe porcentajes como fraccionarios y decimales. Resuelve problemas que involucran porcentajes.** Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0{,}5 = 0{,}50 \quad \text{o} \quad 0{,}28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25} = 7 \div 25$$

$$28\% = 0{,}28 = \frac{28}{100} \quad \text{o} \quad 6\% = \frac{6}{100} = 0{,}06$$



- Treinta y tres (33) niñas de 40 que hay en el salón participaron en la competencia de lectura. ¿Qué porcentaje de las niñas participó?

$$\frac{33}{40} = 33 \div 40 = 0{,}825 = \frac{82{,}5}{100} = 82{,}5\%$$

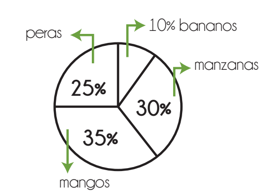
- En el pueblo hay 88 000 personas. El 32% de los habitantes tiene gafas y el 55% de los que tienen gafas son hombres. ¿Cuántos hombres en el pueblo tienen gafas?

32% de 88 000 personas =
0,32 × 88 000 personas = 28 160 personas con gafas

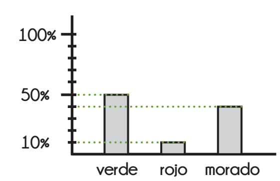
55% de 28 160 personas con gafas =
0,55 × 28 160 personas con gafas = 15 488 hombres con gafas

6 **Interpreta datos que involucran porcentajes.** Por ejemplo:

Cada uno de los 220 estudiantes de primaria trajo una fruta.



Los 80 estudiantes de secundaria votaron por el color del saco del uniforme.



- ¿Cuál fue la fruta más popular?

  El mango.

- ¿Cuántos estudiantes trajeron mangos?

  35% de 220 = 0,35 × 220 = 77 estudiantes

- ¿Cuántos estudiantes votaron por los colores morado y verde?

  40% + 50% = 90% y 90% de 80 = 0,9 × 80 = 72 estudiantes

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

7 **Reconoce la jerarquía de las operaciones** al escribir y evaluar expresiones numéricas que involucran paréntesis, sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias. Por ejemplo:

- Segundo: el exponente $2^2 = 4$; Cuarto: la suma

$$3 \times (3-1)^2 + 6 = 3 \times (2)^2 + 6 = 3 \times 4 + 6 = 12 + 6 = 18$$

Primero: el paréntesis $3 - 1 = 2$; Tercero: la multiplicación $3 \times 4 = 12$

1ero	El paréntesis
2do	Las potencias
3ro	Multiplicación y división
4to	Suma y resta

- **En la expresión 3 + 3 × 3 − 3 pone paréntesis de forma que se obtengan distintos resultados:**

$$3 + 3 \times 3 - 3 = 9 \qquad (3+3) \times 3 - 3 = 15$$
$$3 + 3 \times (3-3) = 3 \qquad (3+3) \times (3-3) = 0$$

- **Sabe que para calcular $\frac{3}{6+4}$ en la calculadora, debe usar paréntesis y escribir 3 ÷ (6 + 4).**

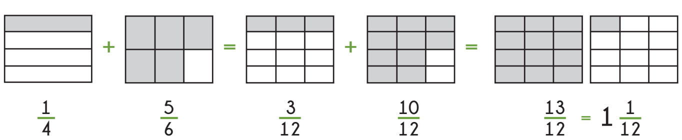
8 **Multiplica o divide el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número para hacerla equivalente a otra y comprende la equivalencia en distintos contextos.** Por ejemplo:

$$\frac{4}{7} = \frac{?}{21} \longrightarrow \frac{4}{7} = \frac{12}{21} \quad \text{o} \quad \frac{5}{9} = \frac{55}{?} \longrightarrow \frac{5}{9} = \frac{55}{99}$$

Comprende que decir "De cada 21 candidatos 12 son elegidos" es equivalente a decir "De cada 7 candidatos 4 son elegidos".

Identifica los múltiplos comunes de dos números y usa esta información para sumar y restar fracciones. Por ejemplo:

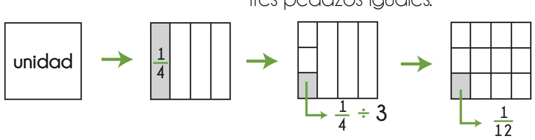
$$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{?}{12} + \frac{?}{12} = \frac{3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{3+10}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$



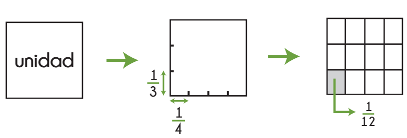
9 **Divide una fracción por un número natural** (usando estrategias que muestran comprensión y no sólo memorización) y lo relaciona con la multiplicación de fracciones. Por ejemplo: $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

- $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{12}$

Divide la cuarta parte en tres pedazos iguales.



- $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$



10 **Resuelve problemas de proporcionalidad directa.** Por ejemplo:

- Si Tomás se demora 7 minutos sembrando 2 matas, ¿cuántos minutos se demorará sembrando 12 matas?
  Si se demora 7 minutos sembrando 2 matas, entonces se demora 3,5 minutos sembrando una sola mata (7÷2 = 3,5).

$$3{,}5 \times 12 = 42$$

Por lo tanto, Tomás se demora 42 minutos sembrando 12 matas.

- Para hacer 7 galletas Nidia necesita 1 huevo y 2 tazas de harina. Con 10 tazas de harina, ¿cuántas galletas puede hacer Nidia? ¿Cuántos huevos necesita?

galletas	7		21	
huevos	1			13
tazas de harina	2	10		

→

galletas	7	35	21	91
huevos	1	5	3	13
tazas de harina	2	10	6	26

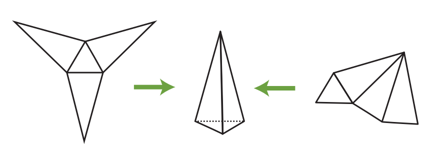
Con 10 tazas de harina, Nidia necesita 5 huevos y puede hacer 35 galletas.

Para hacer 21 galletas necesita 3 huevos y 6 tazas de harina. Con 13 huevos puede hacer 91 galletas y necesita 26 tazas de harina.

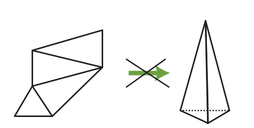
Resuelve problemas sencillos que involucran la proporcionalidad inversa. Por ejemplo: Varias personas se unen para comprar un equipo de sonido de $240 000. Entre más personas participan de la compra, menos dinero debe poner cada uno. Completa la tabla:

Número de compradores	Cantidad por persona (en $)
1	$ 240 000
2	$ 120 000
4	$ 60 000
6	
8	

11 **Construye objetos sencillos a partir de moldes;** identifica si un cierto molde puede resultar en un cierto objeto. Por ejemplo:



en cambio...

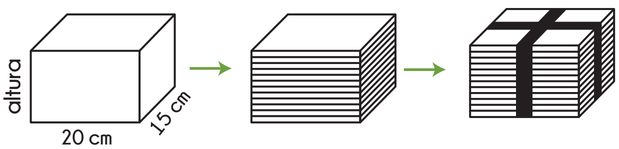


MINEDUCACIÓN
TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

12 Resuelve problemas que involucran los conceptos de volumen, área y perímetro.

Por ejemplo:

Se quiere adornar una caja pegándole papel de rayitas a las cuatro paredes laterales y luego envolviéndola con dos cintas (como se muestra en la figura).



- ¿Cuál debe ser la altura de la caja para que su capacidad sea de $3\,000\ cm^3$?

$$\text{volumen} = 20\ cm \times 15\ cm \times \boxed{\ } = 300\ cm^2 \times \boxed{\ } = 3\,000\ cm^3$$

$$\rightarrow \boxed{\ } = 10\ cm = \text{altura}$$

- ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel de rayitas se necesitan?

$$(20\ cm \times 10\ cm) + (15\ cm \times 10\ cm) + (20\ cm \times 10\ cm) + (15\ cm \times 10\ cm)$$

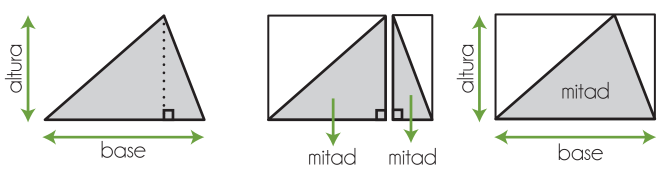
$$200\ cm^2 + 150\ cm^2 + 200\ cm^2 + 150\ cm^2 = 700\ cm^2$$

- ¿Cuántos centímetros de cinta se necesitan?

$$(4 \times 10\ cm) + (2 \times 15\ cm) + (2 \times 20\ cm)$$

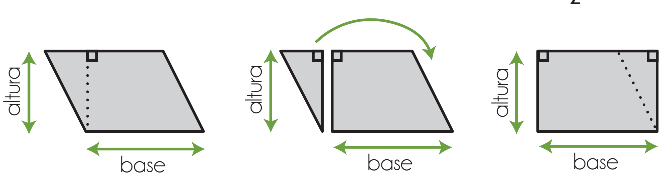
$$= 40\ cm + 30\ cm + 40\ cm = 110\ cm$$

13 Comprende por qué funcionan las fórmulas para calcular áreas de triángulos y paralelogramos.



Área del rectángulo: base x altura

Área del triángulo: $\dfrac{\text{base x altura}}{2}$



Área del rectángulo: base x altura
Área del paralelogramno: base x altura

14 Hace conversiones entre distintas unidades de medida.

Por ejemplo:

- La hermanita de Vanessa, al nacer, pesó 3 580 gramos. Es decir, pesó 3,58 kilogramos.
- Esa botella tiene una capacidad de 1,5 litros. Es decir, le caben 1 500 mililitros.
- Mide con precisión el largo de su cuaderno y lo expresa en centímetros, en metros y en milímetros: "Mide 27,4 cm o 0,274 m o 274 mm".

15 Calcula el promedio (la media) e identifica la moda en un conjunto de datos.

Por ejemplo: En la tabla aparece la cantidad de goles que metió cada persona durante el campeonato de fútbol masculino.

Jugador	Número de goles
Simón	4
Diego	3
Enrique	3
Daniel	5
Francisco	7
Nicolás	2

La moda: 3 goles
(el dato que más se repite)

La media: 4 goles por persona

$$\frac{4+3+3+5+7+2}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

16 Comprende la probabilidad de obtener ciertos resultados en situaciones sencillas.

Por ejemplo: Tiene una bolsa con tres bolas verdes y una blanca.

- Al meter la mano en la bolsa y sacar una sola bola, sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola verde?

  Como $\frac{3}{4}$ del total de las bolas son verdes, la probabilidad de sacar una verde es de 75%.

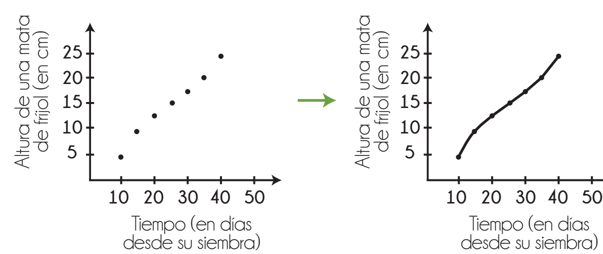
$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0{,}75 = 75\%$$

- ¿Cuántas bolas blancas habría que meter para que fuera igualmente posible sacar una bola verde o una bola blanca?

  Debe haber tantas bolas verdes como blancas. Por lo tanto, habría que meter 2 bolas blancas.

17 Lee e interpreta gráficas de línea. **Comprende que en ciertas situaciones una gráfica de puntos puede completarse para obtener una gráfica de línea.**

Por ejemplo: Se siembra una mata de fríjol y a partir del décimo día se mide su altura cada cinco días.



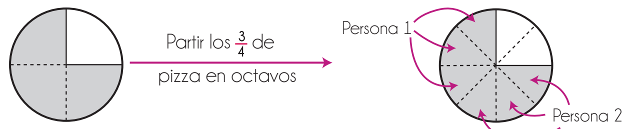
Si el día 10 medía 4 cm y el día 15 medía 9 cm, entonces entre los días 10 y 15 creció de 4 a 9 centímetros. En cualquier instante entre los días 10 y 15 se hubiera podido registrar su altura.

MINEDUCACIÓN
TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS – GRADO 6

1 **Resuelve problemas en los que debe dividir un entero entre una fracción o una fracción entre una fracción.** Por ejemplo: Tengo $\frac{3}{4}$ de pizza para repartir. Si le doy $\frac{3}{8}$ de pizza a cada persona, ¿a cuántas personas alcanzo a darles pizza?



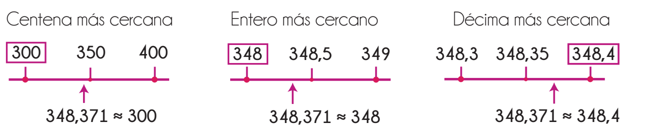
$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}}{\frac{3}{8}\times\frac{8}{3}} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}}{1} = \frac{3}{4}\times\frac{8}{3} = \frac{\cancel{3}\times 8}{4\times\cancel{3}} = \frac{8}{4} = 2$$ Alcanza para dos personas.

Comprende por qué dividir por $\frac{a}{b}$ corresponde a multiplicar por $\frac{b}{a}$.

2 **Resuelve problemas que involucran números racionales positivos** (fracciones, decimales o números mixtos) en diversos contextos haciendo uso de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Realiza cálculos a mano, con calculadoras o dispositivos electrónicos.

3 **Aproxima dependiendo de la necesidad.** Por ejemplo:

- Aproxima 348,371 a la centena más cercana (que es 300, pues 348,371 está más cerca de 300 que de 400), a la decena más cercana (que es 350, pues 348,371 está más cerca de 350 que de 340), al entero más cercano (348), a la décima más cercana (348,4), o a la centésima más cercana (348,37).



- La superficie de Colombia (continental y marítima) es de aproximadamente 2 millones de kilómetros cuadrados (2 129 748 km^2 ≈ 2 000 000 km^2).
- π (pi) es aproximadamente igual a 3,14 (π = 3,14159265... ≈ 3,14). Una mejor aproximación sería π ≈ 3,142. Aún mejor, sería π ≈ 3,1416. Etc.

4 **Resuelve problemas utilizando porcentajes.** Por ejemplo:

- La mamá de Julián va a comprar unas sábanas de $70 000. Sin embargo, cuando va a pagar le dicen que las sábanas están en descuento y le cobran $58 100. ¿De cuánto fue el descuento (en porcentaje)?

$70 000 – $58 100 = $11 900 y $\frac{\text{descuento}}{\text{total}} = \frac{\$11\,900}{\$70\,000} = 0{,}17 = 17\%$

- En el vivero Luz compró una mata por $4 200 que ya tenía un descuento de 30%. ¿Cuánto le hubiera costado la mata sin el descuento?

El descuento fue de 30%, por lo tanto, $4 200 representa el 70% del valor original de la mata.

÷7: 70 % → $4 200 ÷7
10 % → $600
×10: 100 % → $6 000 ×10

La mata hubiera costado 6 000 pesos.

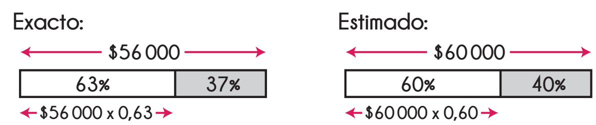
5 **Comprende en qué situaciones necesita un cálculo exacto y en qué situaciones puede estimar.** Por ejemplo:

- Cuatro amigos salen a comer. La cuenta es de $27 400 y la reparten entre los cuatro. ¿Cuánto le corresponde pagar a cada uno?

Para aproximar el valor por persona pueden calcular mentalmente $\frac{\$28\,000}{4}$ = $7 000. Así, cada uno debe pagar un poquito menos de $7 000. El cajero, en cambio, debe hacer el cálculo exacto: $\frac{\$27\,400}{4}$ = $6 850.

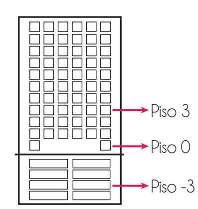
- En un almacén Lucía ve una blusa que costaba originalmente $56 000 pero que tiene el 37% de descuento. Quiere saber más o menos cuánto vale, a ver si le alcanza el dinero que trae.

El cálculo exacto sería $56 000 × 0,63. Aproxima entonces a un cálculo fácil de realizar mentalmente $60 000 × 0,6 = $36 000. Así que la blusa, con el descuento, cuesta aproximadamente 36 mil pesos. Cuando va a pagar le dan el precio exacto: $56 000 × 0,63 = $35 280.

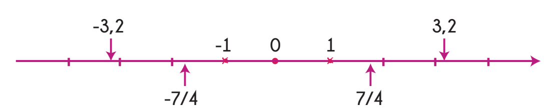


6 **Comprende el significado de los números negativos en diferentes contextos.** Por ejemplo:

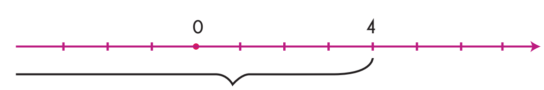
- En el Polo Norte la temperatura hoy fue de −29 °C. Es decir, 29 °C por debajo de 0 °C.
- Margarita pide el ascensor en el piso de la recepción (piso 0) de un edificio que tiene 10 pisos de oficinas y 4 pisos de parqueadero subterráneo. Si Margarita marca el 3, sube al tercer piso de oficinas. Si marca −3 baja al tercer piso de parqueaderos.



Representa números positivos y negativos en la recta numérica comprendiendo la simetía con respecto al 0. Por ejemplo:



Ubica en la recta numérica números con ciertas propiedades. Por ejemplo: Todos los valores menores a 4:

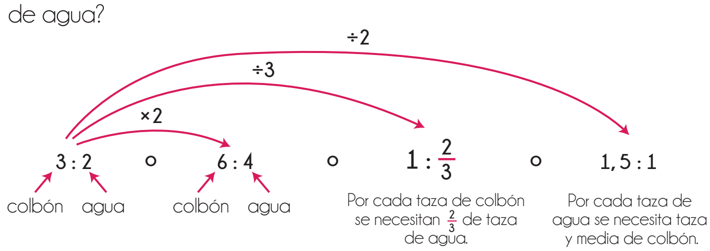


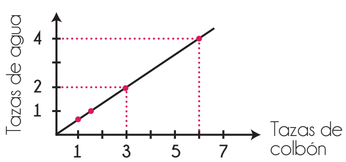
cualquier número a la izquierda de 4 es menor a 4

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

7 **Soluciona problemas que involucran proporción directa y puede representarla de distintas formas.** Por ejemplo: para hacer papel maché, se humedecen tiras de papel periódico en una mezcla de agua y colbón. Por cada tres (3) tazas de colbón se necesitan dos (2) tazas de agua. ¿Cuántas tazas de agua necesito si uso 6 tazas de colbón? ¿Cuántas tazas de colbón necesito si uso una taza de agua?





Colbón	3	6	1	1,5
Agua	2	4	2/3	1

Relaciona las nociones de proporciones y porcentajes. Por ejemplo, comprende que el colbón representa el 60% de la mezcla y puede determinar cuántas tazas de agua y cuántas de colbón necesita para producir una mezcla de 15 tazas:

$$\frac{\text{colbón}}{\text{mezcla}} = \frac{3 \text{ tazas}}{3 \text{ tazas} + 2 \text{ tazas}} = \frac{3 \text{ tazas}}{5 \text{ tazas}} = 0{,}6 = 60\% \quad \text{o}$$

$$\frac{\text{colbón}}{\text{mezcla}} = \frac{6 \text{ tazas}}{6 \text{ tazas} + 4 \text{ tazas}} = \frac{6 \text{ tazas}}{10 \text{ tazas}} = 0{,}6 = 60\%$$

El 60% de la mezcla es colbón:
0,60 × 15 tazas de mezcla = 9 tazas de colbón.
Por lo tanto, necesita 6 tazas de agua.

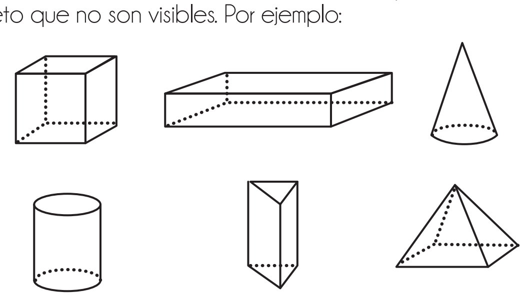
8 **Usa razones (con cantidades y unidades) para solucionar problemas de proporcionalidad.** Por ejemplo: Si usamos 90 ml de crema de leche para preparar una receta para 12 personas, ¿cuántos mililitros usaremos para 80 personas?

$$\frac{90 \text{ ml}}{12 \text{ personas}} = 7{,}5 \text{ ml/persona}$$

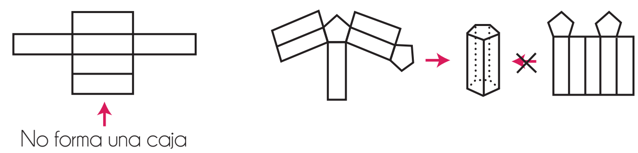
Es decir, necesitamos 7,5 mililitros de crema de leche para una sola persona. Así, para 80 personas necesitamos:

$$7{,}5 \frac{\text{ml}}{\text{persona}} \times 80 \text{ personas} = 600 \text{ ml.}$$

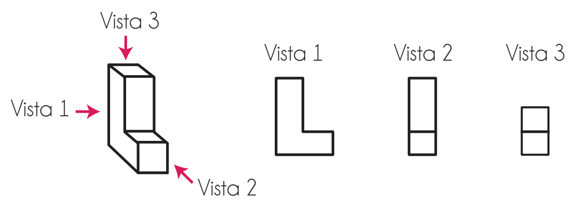
9 **Representa cubos, cajas, conos, cilindros, prismas y pirámides en forma bidimensional** marcando con líneas punteadas las líneas del objeto que no son visibles. Por ejemplo:



10 **Construye moldes para cubos, cajas, prismas o pirámides dadas sus dimensiones y justifica cuando cierto molde no resulta en ningún objeto.** Por ejemplo:



Identifica las distintas vistas de un objeto. Por ejemplo:

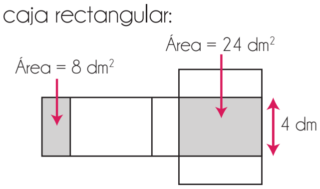


11 **Soluciona problemas que involucran el área de superficie y el volumen de una caja.** Por ejemplo:

- Calcula el área superficial de un cubo de volumen 74, 088 cm^3.

Volumen = 74,088 cm^3 = $(\text{lado})^3$ → lado = $\sqrt[3]{74{,}088 \text{ cm}^3}$ = 4,2 cm
Área de una cara = $(4{,}2 \text{ cm})^2$ = 17,64 cm^2
Área de superficie del cubo = 6 × 17,64cm^2 = 105,84 cm^2

- Molde para caja rectangular:

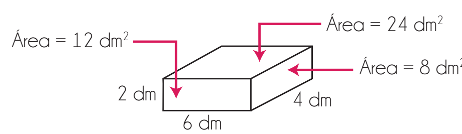


Usando el área de las dos caras dadas, deduce que los otros dos lados de la caja deben medir 6 dm y 2 dm. Por lo tanto, el volumen de la caja es 48 dm^3

$$2 \text{ dm} \times 4 \text{ dm} \times 6 \text{ dm} = 48 \text{ dm}^3$$

y su área de superficie es 88 dm^2

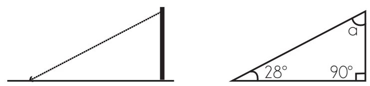
$$2 \times 8 \text{dm}^2 + 2 \times 12 \text{dm}^2 + 2 \times 24 \text{dm}^2 = 16 \text{dm}^2 + 24 \text{dm}^2 + 48 \text{dm}^2 = 88 \text{dm}^2$$



Realiza conversiones de unidades de medida entre litros, metros cúbicos o centímetros cúbicos. Por ejemplo: Los lados de esta caja miden 4 dm, 6 dm y 2 dm. Por lo tanto, en centímetros miden 40 cm, 60 cm y 20 cm. Así, el volumen de la caja es de 48 000 cm^3. Como 1 litro son 1 000 cm^3, entonces 48 000 cm^3 = 48 litros.

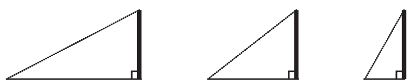
MINEDUCACIÓN
TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

12 **Identifica ángulos faltantes tanto en triángulos equiláteros, isósceles y rectos, como en paralelogramos, rombos y rectángulos. Usa el hecho de que la suma de los ángulos en un triángulo es 180° para solucionar problemas sencillos.** Por ejemplo: Vicente clava en el suelo el extremo de una pita larga amarrada en la parte alta de un poste. Para calcular el ángulo que la pita forma con el poste, Vicente mide primero el ángulo que la pita forma con el suelo:



$a + 28° + 90° = 180°$
$a + 118° = 180°$
$a = 62°$

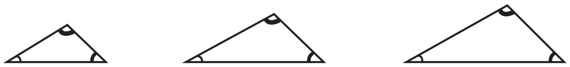
Analiza cómo cambiar un dato en un problema afecta a las demás variables. Por ejemplo: ¿Qué pasaría con esos ángulos si la pita fuera más corta?



El ángulo entre la pita y el suelo aumentaría, y por lo tanto, el ángulo entre la pita y el poste disminuiría.

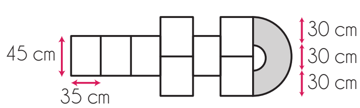
13 **Usando regla y transportador, construye triángulos con dimensiones dadas.** Por ejemplo:

- Construye un triángulo con un lado de 8,6 cm, otro lado de 5,1 cm, y entre ellos un ángulo de 75°.
- Construye un triángulo con un lado de 13 mm, entre dos ángulos: uno de 45° y otro de 60°.
- Muestra que existen muchos triángulos con los ángulos 30°, 45° y 105°.



- Evidencia que no se puede construir un triángulo de lados 10 cm, 5 cm y 3 cm.

14 **Usa las fórmulas del perímetro, longitud de la circunferencia y el área de un círculo para calcular la longitud del borde y el área de figuras compuestas por triángulos, rectángulos y porciones de círculo.** Por ejemplo, para pintar una golosa, calcula cuántos centímetros debe pintar con la tiza y calcula el área del cielo (área gris).



longitud de línea de tiza $= 14 \times 35\text{ cm} + 11 \times 45\text{ cm} + 45\text{ cm} \times \pi + 15\text{ cm} \times \pi$

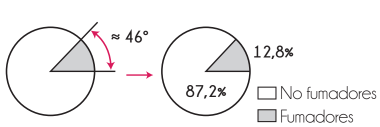
$\approx 490\text{ cm} + 495\text{ cm} + 141{,}372\text{ cm} + 47{,}124\text{ cm} \approx 1\,173{,}496\text{ cm}$

área gris $= \frac{\pi \times (45\text{ cm})^2}{2} - \frac{\pi \times (15\text{ cm})^2}{2} = \frac{\pi}{2}((45\text{ cm})^2 - (15\text{ cm})^2)$

$= \frac{\pi}{2} \times 1800\text{ cm}^2 = 900\,\pi\text{ cm}^2 \approx 2827{,}433\text{ cm}^2$

15 **Usa el transportador para realizar con precisión diagramas circulares a partir de datos y porcentajes.** Por ejemplo: En el año 2 007, un estudio mostró que el 12,8% de los colombianos entre 18 y 65 años fumaba.

÷100: 100 % → 360° ÷100
1 % → 3,6°
×12,8: 12,8 % → 46,08° ×12,8



12,8% de 360° = 0,128 × 360° = 46,08°

16 **Usa letras para representar cantidades y las usa en expresiones sencillas para representar situaciones.** Por ejemplo:

- Entiende que el perímetro de un cuadrado de lado y es $4y$, pues $4y = y + y + y + y$
- Ya se pintaron A metros cuadrados de una pared de 100 m². Lo que queda por pintar se lo dividen entre 5 personas. Así, cada uno debe pintar $\frac{100 - A}{5}$ metros cuadrados, que se escribe también como $(100 - A) \div 5$. Si ya se pintaron 15 m², es decir $A = 15$, entonces a cada uno le corresponden 17 m²:

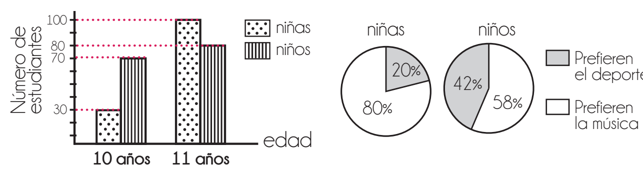
$$\frac{100\text{ m}^2 - A\text{ m}^2}{5\text{ personas}} = \frac{100\text{ m}^2 - 15\text{m}^2}{5\text{ personas}} = \frac{85\text{ m}^2}{5\text{ personas}} = 17\text{ m}^2/\text{persona}$$

Es decir, 17 metros cuadrados por persona.

- Adriana alcanzó a leer t palabras, su hermano Andrés leyó el triple, y su primo Iván leyó dos palabras menos que Adriana. Entre todos leyeron $5t - 2$ palabras.

$$(t) + (3t) + (t - 2) = t + 3t + t - 2 = 5t - 2$$

17 **Relaciona información proveniente de distintas fuentes de datos.** Por ejemplo: Se le preguntó a un grupo grande de estudiantes de 10 y 11 años si preferían la música o el deporte.



- ¿Qué porcentaje de los estudiantes encuestados son niños?

$$\frac{\text{Total niños}}{\text{Total estudiantes}} = \frac{70 + 80}{30 + 70 + 100 + 80} = \frac{150}{280} = \frac{15}{28} \approx 0{,}54 = 54\%$$

- ¿Cuántos niños prefieren la música al deporte?

58% de (70 + 80) niños = 0,58 × 150 niños = 87 niños

- ¿Qué porcentaje de los estudiantes encuestados prefiere el deporte?

20% de 130 niñas + 42% de 150 niños =
(0,20 × 130 niñas) + (0,42 × 150 niños) = 26 niñas + 63 niños = 89 estudiantes

$$\frac{\text{Estudiantes que prefieren el deporte}}{\text{Total estudiantes}} = \frac{89}{280} \approx 0{,}32 = 32\%$$

18 **Calcula la media (el promedio), la mediana y la moda de un conjunto de datos.** Por ejemplo:

Ángela se sabe 2 poesías de memoria; Catalina se sabe 5; Ana María e Isabel se saben 8 cada una.

- **media** $= \frac{2 + 5 + 8 + 8}{4} = \frac{23\text{ poesías}}{4\text{ personas}} = 5{,}75$ poesías/persona
- de menor a mayor: $2\ \underbrace{5\ \ 8}_{\frac{5+8}{2}}\ 8$ ⟶ **mediana** $= \frac{5+8}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$ poesías
- **moda** = 8 poesías (el dato que más se repite)

MINEDUCACIÓN

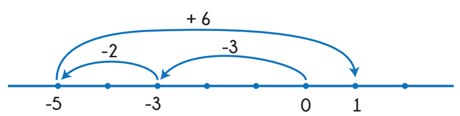
TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

MATEMÁTICAS – GRADO 7

1

Resuelve problemas que involucran números racionales positivos y negativos (fracciones, decimales o números mixtos) en diversos contextos haciendo uso de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Realiza cálculos a mano, con calculadoras o dispositivos electrónicos. Por ejemplo:

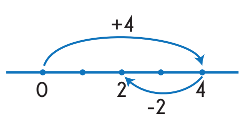
- Representa la suma y la resta como movimientos hacia la derecha o hacia la izquierda (respectivamente) en la recta numérica. Así, para obtener el resultado de −3 − 2 + 6, se ubica en el 0, se mueve 3 a la izquierda, 2 a la izquierda y 6 a la derecha.



$-3 - 2 + 6 = 1$

- Comprende que $a - (+b) = a - b$, que $a + (-b) = a - b$ y que $a - (-b) = a + b$. Por ejemplo:
  - **4 − 2 es lo mismo que 4 − (+2) y 4 + (−2),**

$4 - 2 = 2$



hacia la derecha
$4 - (+2)$
dirección opuesta

hacia la izquierda
$4 + (-2)$
se mantiene la dirección

  - **1 − (−3) es lo mismo que 1 + 3.**

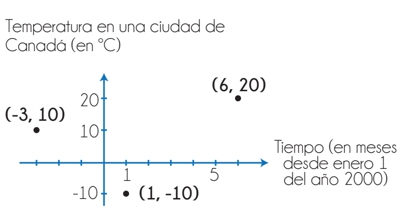
hacia la izquierda
$1 - (-3)$
dirección opuesta

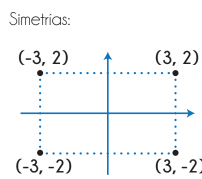
- Hace cálculos con números fraccionarios negativos y decimales negativos y expresiones con variables. Por ejemplo:

$$\frac{5-4}{5(-4)} = \frac{1}{-20} = -\frac{1}{20}$$

o $(-1-2{,}5)^2 = (-3{,}5)^2 = (-3{,}5)(-3{,}5) = 12{,}25$ o $2t - 6t = -4t$

Extiende los ejes del plano coordenado a valores negativos en diferentes contextos. Comprende la simetría con respecto a los ejes. Por ejemplo:





(6, 20): En julio 1 del año 2000, la temperatura fue de 20 °C.
(−3, 10): En octubre 1 del año 1999, la temperatura fue de 10 °C (tres meses antes de enero 1 del 2000).
(1, −10): En febrero 1 del 2000 la temperatura fue de −10 °C (10 °C grados bajo 0 °C).

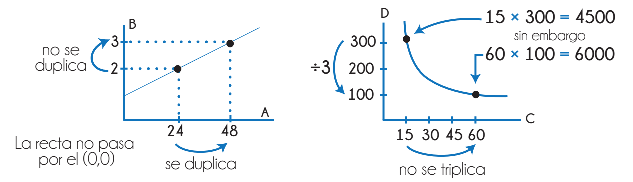
Usa los signos <, ≤, > y ≥ para representar relaciones entre números. Por ejemplo:

$-\frac{1}{2} < 0{,}2 < \pi$ y $-20\ °C < -10\ °C < 10\ °C$

2

Identifica si en una situación dada las variables son directamente proporcionales o inversamente proporcionales o ninguna de las dos. Por ejemplo:

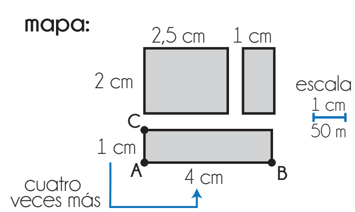
- Reconoce características necesarias para garantizar la proporcionalidad.



Cuando A crece, B crece. Sin embargo, A y B no son **directamente proporcionales**. Cuando C crece, D decrece. Sin embargo C y D no son **inversamente proporcionales.**

- Las longitudes en un mapa y las longitudes reales que este representa son **directamente proporcionales.** Por ejemplo, si en el mapa la distancia de A a B es cuatro veces más que la distancia de A a C, entonces, en la realidad, la distancia de A' a B' es cuatro veces más que la distancia de A' a C'.

mapa:



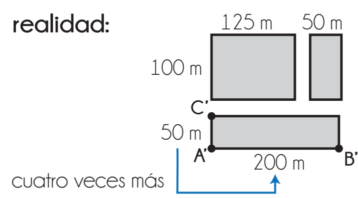
× 4 50 m ⟷ 1 cm × 4
y ⟷ 4 cm

$$\frac{50\ m}{1\ cm} = \frac{x}{2{,}5\ cm}$$

$$2{,}5\ cm \times \frac{50\ m}{1\ cm} = x$$

$$125\ m = x$$

realidad:



- Se necesitan 600 tejas para cubrir el tejado. Entre más trabajadores hagan el trabajo, menos tejas tendría que poner cada uno. El número de trabajadores es **inversamente proporcional** al número de tejas que coloca cada trabajador. Por ejemplo, cuando el número de trabajadores se duplica, el número de tejas por trabajador se divide por 2.

# de trabajadores	# de tejas por trabajador
1	600
2	
3	
	12
60	

→

# de trabajadores	# de tejas por trabajador
1	600
2	300
3	200
50	12
60	10

×2 ÷2
×30 ÷30

$1 \times 600 = 600$
$2 \times 300 = 600$
$3 \times 200 = 600$

$50 \times 12 = 600$
$60 \times 10 = 600$

MATEMÁTICAS – GRADO 7

3 **Descompone cualquier número entero en factores primos. Identifica el máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (mcm)** de dos o más números y los usa para simplificar cálculos. Por ejemplo:

- $\sqrt{40} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 5} = \sqrt{2^2 \times 10} = 2\sqrt{10}$
- Para calcular $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{12}$ puede multiplicar los denominadores $(4 \times 5 \times 12 = 240)$ y obtener

$$\frac{3 \times 5 \times 12}{4 \times 5 \times 12} - \frac{2 \times 4 \times 12}{5 \times 4 \times 12} + \frac{1 \times 4 \times 5}{12 \times 4 \times 5} = \frac{180}{240} - \frac{96}{240} + \frac{20}{240} = \frac{180 - 96 + 20}{240} = \frac{104}{240}$$

En cambio, usando el mcm de los denominadores (que es 60) se obtiene

$$\frac{3 \times 15}{4 \times 15} - \frac{2 \times 12}{5 \times 12} + \frac{1 \times 5}{12 \times 5} = \frac{45}{60} - \frac{24}{60} + \frac{5}{60} = \frac{45 - 24 + 5}{60} = \frac{26}{60}$$

4 **Comprende y calcula incrementos y reducciones porcentuales en diversos contextos.** Por ejemplo:

- El salario de Carlos es de **$1 000 000** y el de Clemencia es de **$1 200 000.**

$$\frac{\$1\ 200\ 000}{\$1\ 000\ 000} = \frac{12}{10} = 1{,}2 = 120\% \quad \text{y} \quad \frac{\$1\ 000\ 000}{\$1\ 200\ 000} = \frac{10}{12} = 0{,}833... \approx 83{,}3\%$$

Así, el salario de Clemencia es el 120% del salario de Carlos. Que es lo mismo que decir que el salario de Clemencia es 20% mayor que el de Carlos, o que el salario de Carlos debe aumentar en un 20% para llegar al de Clemencia.

$$\begin{aligned} \$1\ 200\ 000 &= 1{,}2 \times \$1\ 000\ 000 = (1 + 0{,}2) \times \$1\ 000\ 000 \\ &= \$1\ 000\ 000 + 0{,}2 \times \$1\ 000\ 000 \\ &= \$1\ 000\ 000 + 20\% \text{ de } \$1\ 000\ 000 \end{aligned}$$

Por otro lado, el salario de Carlos es aproximadamente el 83% del de Clemencia. Que es lo mismo que decir que el salario de Carlos es aproximadamente 17% menor que el de Clemencia, o que si el salario de Clemencia se reduce en un 17% entonces sería aproximadamente igual al de Carlos.

$$\begin{aligned} \$1\ 000\ 000 &= 0{,}83 \times \$1\ 200\ 000 = (1 - 0{,}17) \times \$1\ 200\ 000 \\ &= \$1\ 200\ 000 - 0{,}17 \times \$1\ 200\ 000 \\ &= \$1\ 200\ 000 - 17\% \text{ de } \$1\ 200\ 000 \end{aligned}$$

- Para calcular la propina (P), Yohana toma el valor que le cobraron (V) y lo multiplica por 0,12.

$$P = 0{,}12 \times V$$

Por lo tanto, la propina es el 12% del valor que le cobraron.

5 **Usa las relaciones entre velocidad, distancia y tiempo para solucionar problemas. En particular, comprende la diferencia entre velocidad constante y velocidad promedio durante un intervalo de tiempo y convierte unidades de velocidad** (como m/s y km/h). Por ejemplo: Una flota tardó hora y media en recorrer 92 km haciendo un par de paradas en el camino. Su velocidad promedio fue de $\frac{92 \text{ km}}{1{,}5 \text{ h}} \approx 61{,}33$ km/h, sin embargo su velocidad no fue constante durante todo el trayecto (a veces iba más rápido y a veces más despacio). Para expresar la velocidad promedio en metros por segundo:

$$61{,}33 \text{ km/h} = \frac{61{,}33 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{61{,}33 \text{ km}}{1 \text{ h}} \times \frac{1 \text{h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1\ 000 \text{ m}}{1 \text{ km}}$$

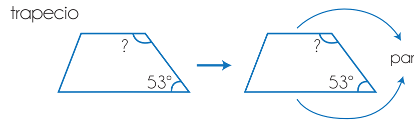
$$= \frac{61{,}33 \times 1\ 000}{60 \times 60} \text{ m/s} = \frac{61\ 330}{3\ 600} \text{ m/s} \approx 17{,}04 \text{ m/s}$$

Otra forma de hacerlo:

$$61{,}33 \text{ km en } 1 \text{ h} = 61\ 330 \text{ m en } 60 \text{ min} = 61\ 330 \text{ m en } 3\ 600 \text{ s}$$

$$= \frac{61\ 330}{3\ 600} \text{ m/s} \approx 17{,}04 \text{ m/s}$$

6 **Hace dos copias iguales de 2 rectas paralelas cortadas por una secante, y por medio de superposiciones, descubre la relación entre los ángulos formados. Soluciona problemas en contextos geométricos que involucran calcular ángulos faltantes en un triángulo o cuadrilátero.** Por ejemplo:



? = 180° − 53° = 127°

7 **Manipula expresiones lineales (del tipo ax + b, donde a y b son números dados), las representa usando gráficas o tablas y las usa para modelar situaciones. Soluciona ecuaciones lineales** (del tipo ax + b = c, donde a, b y c, son números dados). Por ejemplo:

- Soluciona la ecuación $7 - 3x = 11$:

Opción 1:

$$\begin{aligned} 7 - 3x &= 11 & (+3x) \\ 7 &= 11 + 3x & (-11) \\ -4 &= 3x & (\div 3) \\ -\frac{4}{3} &= x \end{aligned}$$

Opción 2:

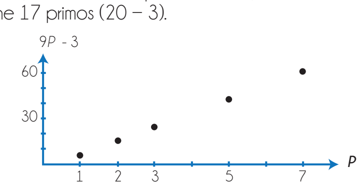
$$\begin{aligned} 7 - 3x &= 11 & (-7) \\ -3x &= 4 & (\div(-3)) \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

- Luisa tiene cuatro veces más primos que Felipe. Jairo tiene 3 primos menos que Luisa. Entre los tres tienen 42 primos. ¿Cuántos primos tiene cada uno?

$$\underset{\text{Felipe}}{P} + \underset{\text{Luisa}}{4P} + \underset{\text{Jairo}}{4P - 3} = \underset{\text{Total}}{9P - 3 = 42} \rightarrow 9P = 45 \rightarrow P = 5$$

Así, Felipe tiene 5 primos, Luisa tiene 20 primos (4 × 5), y Jairo tiene 17 primos (20 − 3).

P	1	2	3	5	7
$9P - 3$	6	15	24	42	60



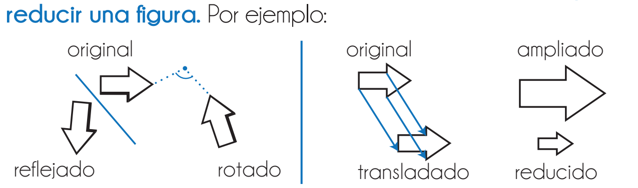
- La gasolina subió 4% de un día para otro. Es decir, se multiplicó por un factor de 1,04.

$$\underbrace{G + 0{,}04G}_{\text{G más 4\% de G}} \overset{\text{Factorizar G}}{=} (1 + 0{,}04)G = 1{,}04G$$

aumentar en 4% es multiplicar por 1,04

8 **Dada una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ (donde a, b y c son números dados), calcula el valor de la expresión para distintos valores de x (positivos y negativos) y presenta sus resultados en forma de tabla o gráfica de puntos.**

9 **Predice el resultado de rotar, reflejar, transladar, ampliar o reducir una figura.** Por ejemplo:

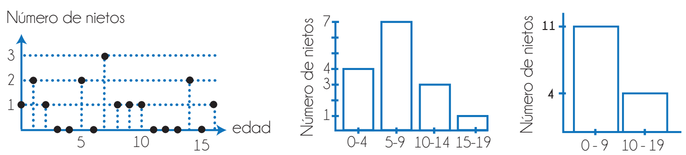


MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

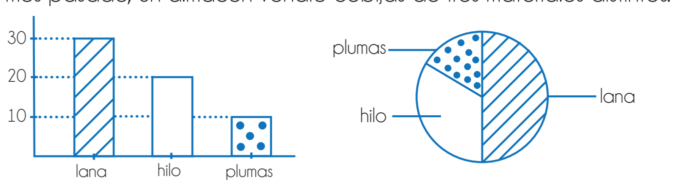
10

Comprende que algunos conjuntos de datos pueden representarse con histogramas y que distintos intervalos producen distintas representaciones. Por ejemplo: Doña Beatriz tiene 15 nietos entre los 0 y los 16 años.



Reconoce las ventajas y desventajas de representar los mismos datos usando distintas representaciones. Por ejemplo:

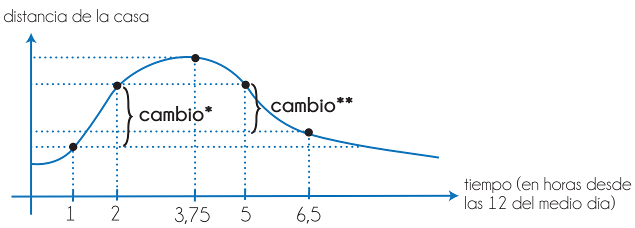
El mes pasado, un almacén vendió cobijas de tres materiales distintos.



El diagrama circular permite ver fácilmente la relación entre cada parte y el todo. Por ejemplo, la mitad de las cobijas vendidas fueron de lana.

11

A partir de una gráfica de puntos o de línea, identifica e interpreta los puntos máximos y mínimos y el cambio entre dos puntos de la gráfica. Por ejemplo: La gráfica muestra la distancia entre una persona y su casa durante las primeras horas del día.



- La distancia marcada como cambio* representa cuánto *creció* la distancia a la casa entre la 1 pm y las 2 pm.
- La distancia marcada como cambio** representa cuánto *decreció* la distancia a la casa entre las 5 pm y las 6:30 pm.
- A las 2 pm y a las 5 pm la distancia a la casa es la misma (no hay cambio).
- A las 3:45 pm se alcanzó la máxima distancia a la casa, es decir, el momento en el que estaba más lejos de la casa (en cualquier otro momento la distancia es menor).

12

Comprende cómo la distribución de los datos afecta la media (promedio), la mediana y la moda. Por ejemplo:

- A cada estudiante de séptimo se le preguntó cuántos libros había leído en toda su vida. Si la mediana fue 9,5 libros, entonces sabemos que el 50% de los estudiantes de séptimo ha leído 9 libros o menos, y el 50% ha leído 10 libros o más.
- Los datos extremos afectan a la media y no tanto a la mediana. Por ejemplo:

Notas (sobre 100): 5 70 75 85 85

media $= \frac{5+70+75+85+85}{5} = \frac{320}{5} = 64$

mediana = 75 (número del medio)

Notas (sobre 100): 65 70 75 85 85

media $= \frac{65+70+75+85+85}{5} = \frac{380}{5} = 76$

mediana = 75 (número del medio)

13

Entiende la diferencia entre la probabilidad teórica y el resultado de un experimento. Por ejemplo:

La probabilidad de lanzar un dado y que caiga "dos" es de $\frac{1}{6}$ (aproximadamente 0,17 o 17%). Sin embargo, si lanzamos un dado seis veces, no necesariamente saldrá cada cara una vez.

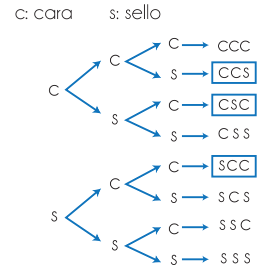
Relaciona la probabilidad con fracciones y porcentajes. Por ejemplo: En el alfabeto hay 27 letras de las cuales 5 son vocales. Si se escoge una letra al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea una consonante?

$$\frac{\text{\# de consonantes}}{\text{total letras}} = \frac{27-5}{27} = \frac{22}{27} \approx 0{,}8148 \approx 81{,}5\%$$

La probabilidad de obtener una consonante es aproximadamente 0,8.

Usa diagramas de árbol para calcular la probabilidad de un evento. Por ejemplo: Si se lanza una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara dos veces y sello una vez (en cualquier orden)?

c: cara s: sello



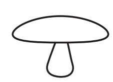
$3 \text{ de } 8 = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

La probabilidad de que dos lanzamientos de tres sean "cara", es 0,375.

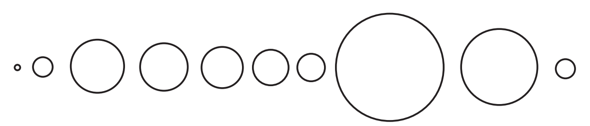
14

Imagina y describe la figura que resultaría al sacarle tajadas a un objeto. Por ejemplo:

Objeto:



Cortes horizontales de abajo hacia arriba.



Cortes verticales.

15

En una serie sencilla identifica el patrón y expresa la n-ésima posición en términos de n. Por ejemplo, en la serie: 1, 4, 9, 16, 25,... identifica que el patrón es elevar al cuadrado (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ...) y así, en la primera posición aparece 1^2, en la décima posición aparece 10^2, y en la n-ésima posición aparece n^2. Después de n^2 viene $(n+1)^2$.

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS – GRADO 8

1

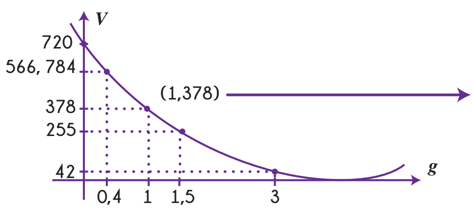
Comprende sin un lenguaje formal la noción de función como una regla f, que a cada valor x, le asigna un único valor $f(x)$ y reconoce que su gráfica está conformada por todos los puntos $(x, f(x))$. También comprende que una función sirve para modelar relaciones de dependencia entre dos magnitudes. Por ejemplo: Una caja (sin tapa) de base 8 dm × 9 dm y altura 10 dm se construye con tablas de grosor g.

El volumen interno de la caja, V, es una función del grosor de las tablas, g. La función $V(g)$ (que se lee "V de g") está dada por:

$$V(g) = 720 - 412g + 74g^2 - 4g^3$$

En general, dado el grosor de las tablas, se puede calcular el volumen interno de la caja. Por ejemplo, si las tablas tienen un grosor de 4 cm (es decir, 0,4 dm), el volumen interno será de 566,784dm³:

$$V(0{,}4) = 720 - 412(0{,}4) + 74(0{,}4)^2 - 4(0{,}4)^3 = 566{,}784$$

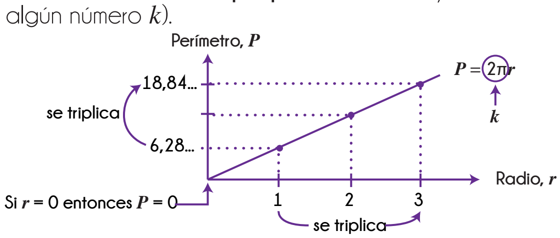


$V(0) = 720$
$V(0{,}4) = 566{,}784$
$V(1) = 378$
$V(1.5) = 255$
$V(3) = 42$

2

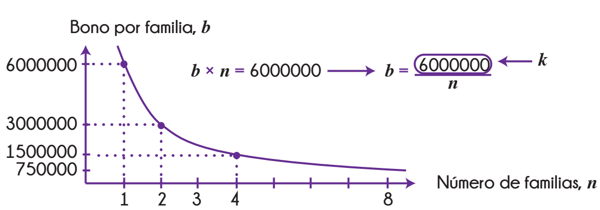
Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa usando razones o proporciones, tablas, gráficas o ecuaciones. En particular sabe que la gráfica que corresponde a una relación de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen y que la gráfica que corresponde a una relación de proporcionalidad inversa no es una recta. Por ejemplo:

- ¿Qué sucede con el perímetro de un círculo cuando el radio se triplica? La relación entre el radio, r, y el perímetro, P, está dada por $P = 2\pi r$, por lo tanto P y r son directamente proporcionales (A y B son **directamente proporcionales** si y sólo si $A = kB$, para algún número k).



Cuando el radio se triplica, el perímetro también se triplica.

- A y B son **inversamente proporcionales** si y sólo si $A = \frac{k}{B}$, para algún número k. Por ejemplo: Se cuenta con 6 millones de pesos para repartir equitativamente entre las familias que se presenten.

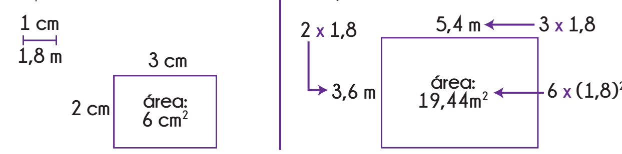


El bono que recibe cada familia es inversamente proporcional al número de familias que participan en el reparto.

3

Realiza diagramas y maquetas estableciendo una escala y explicando su procedimiento. Comprende cómo se transforma el área de una región o el volumen de cierto objeto dada cierta escala. Por ejemplo:

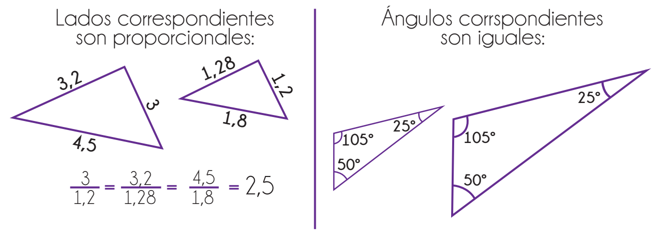
- Representación a escala: | Objeto real:



- Suponga que una maqueta tiene una escala de 1 mm : 15 cm. Si una construcción de 3 mm × 7 mm × 10 mm en la maqueta tiene un volumen de 210 mm³, entonces el modelo real tiene un volumen de 210 × (15)³ cm³.

4

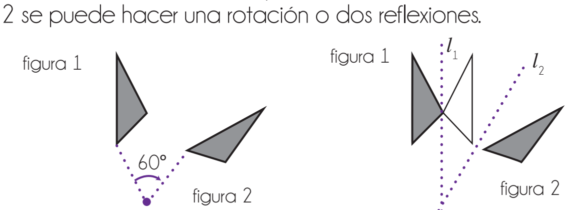
Usa distintos criterios para identificar cuando dos triángulos son semejantes. Por ejemplo:



En el caso de semejanza de polígonos, ambas condiciones son necesarias.

5

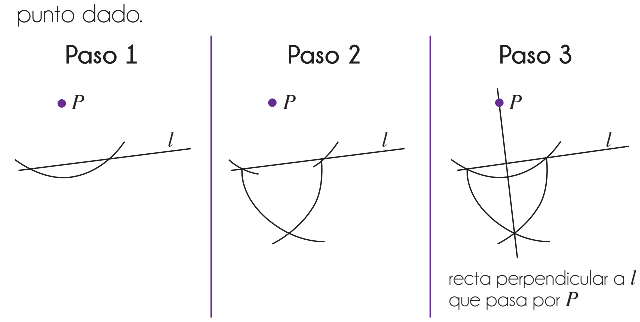
Utiliza transformaciones rígidas para justificar que dos figuras son congruentes. Por ejemplo: Para llegar de la figura 1 a la figura 2 se puede hacer una rotación o dos reflexiones.



6

Realiza construcciones geométricas usando regla y compás. Por ejemplo:

- Construye un triángulo equilátero.
- Construye la perpendicular a una recta dada pasando por un punto dado.



DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 8 ••

7 Reconoce que la gráfica de $y = mx + b$ es una línea recta.

- Encuentra la ecuación de la recta ($y = mx + b$) que pasa por dos puntos dados y comprende el significado gráfico de m y b. Por ejemplo: Dados los puntos $A(-2, -5)$ y $B(4, -1)$, primero calcula la pendiente

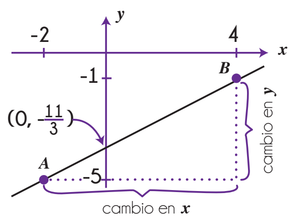
$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{-1-(-5)}{4-(-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Luego, en la ecuación $y = \frac{2}{3}x + b$, reemplaza las coordenadas de A o B para encontrar el valor de b.

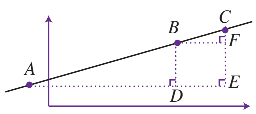
$m = \frac{2}{3}$ ← pendiente

Coordenadas de A

$$-5 = \frac{2}{3}(-2) + b$$
$$-5 = -\frac{4}{3} + b$$
$$-5 + \frac{4}{3} = b$$
$$-\frac{15}{3} + \frac{4}{3} = b$$
$$-\frac{11}{3} = b \longleftarrow \text{corte con el eje } y$$



- Comprende que para calcular la pendiente (m) de una recta se puede utilizar dos puntos cualesquiera sobre la recta.



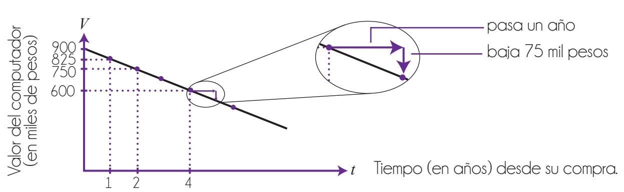
Los triángulos ABD, ACE, y BCF son semejantes.

$m = \frac{BD}{AD}$ o $m = \frac{CE}{AE}$ o $m = \frac{CF}{BF}$

- Comprende que cualquier pareja de puntos (x, y) que satisfaga la relación $y = mx + b$ corresponde a un punto sobre la línea, y cualquier punto (x, y) sobre la línea satisface la relación $y = mx + b$. Por ejemplo, el punto $(-2, 9)$ está sobre la recta $y = 5 - 2x$ (pues $9 = 5 - 2(-2)$), pero el punto $(3, 1)$ no está sobre la recta (pues $1 \neq 5 - 2(3)$).

8 Usa su conocimiento sobre funciones lineales ($f(x) = mx + b$) para plantear y solucionar problemas.

Por ejemplo: Un computador costó \$900 000. Su valor baja \$75 000 cada año.



t	0	1	2	3	4	…	t
V	900	825	750	675	600	…	$900 - 75 \times t$

900 - 75 x 1, 900 - 75 x 2, 900 - 75 x 3, 900 - 75 x 4

Función:
$V(t) = 900 - 75t$

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en el valor del computador}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{-75\text{mil pesos}}{+1\text{año}} = \frac{-75}{1}\ \text{mil pesos/año}$$

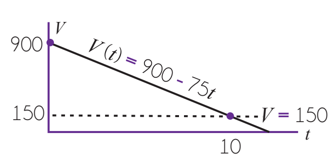
pendiente = −75mil pesos/año

¿Cuál será su valor 7 años después de haberlo comprado?

V = 900 mil pesos − 7 años × 75 mil pesos/año
= 900 mil pesos − 525 mil pesos = 375 mil pesos

¿Cuánto tiempo después de haberlo comprado su valor será de 150 mil pesos?

$$150 = 900 - 75t \quad (+75t)$$
$$150 + 75t = 900 \quad (-150)$$
$$75t = 750 \quad (\div 75)$$
$$t = 10 \text{ años}$$



9 Aplica la propiedad distributiva en expresiones simples como $(Ax + B)(Cx + D)$.

Por ejemplo: En el año 1990, en la Escuela San Ambrosio, había 150 estudiantes y la matrícula costaba \$200 000. Cada año el número de estudiantes aumenta en 22. La matrícula sube \$10 000 cada año. Plantea una función para los ingresos por concepto de matrículas t años después de 1990.

- t: año desde 1990
- Número de estudiantes: $150 + 22t$
- Valor de la matrícula por estudiante: $200000 + 10000t$

Ingresos por matrícula $= I = (150 + 22t)(200000 + 10000t)$

$I = 150 \times 200000 + 150 \times 10000t + 22t \times 200000 + 22t \times 10000t$

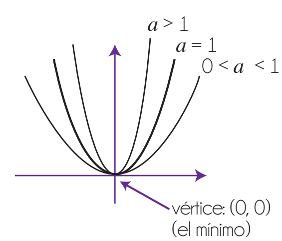
$I = 30000000 + 1500000t + 4400000t + 220000t^2$

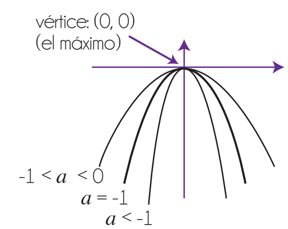
$I(t) = 30000000 + 5900000t + 220000t^2$ ⟵ función cuadrática

Factoriza expresiones cuadráticas ($ax^2 + bx + c$) usando distintos métodos. Comprende que tener la expresión factorizada es de gran ayuda al resolver ecuaciones. Por ejemplo: Si quiere solucionar $x^2 + 3x = 10$, lo escribe como $x^2 + 3x - 10 = 0$, factoriza la ex- presión: $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$, y obtiene $(x - 2)(x + 5) = 0$. Así, $x - 2 = 0$ o $x + 5 = 0$. Por lo tanto, $x = 2$ o $x = -5$.

10 Reconoce que la gráfica de una función cuadrática (de la forma $g(x) = ax^2$, donde a es un número dado) es una parábola

con vértice en el origen, que abre hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo de a y es más abierta o más cerrada que $y = x^2$ dependiendo del valor de a.

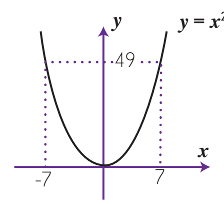




Soluciona ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 = d$. Por ejemplo:

$x^2 = 49$
$x = \pm\sqrt{49}$
$x = \pm 7$

pues $(7)^2 = 49$
y también $(-7)^2 = 49$



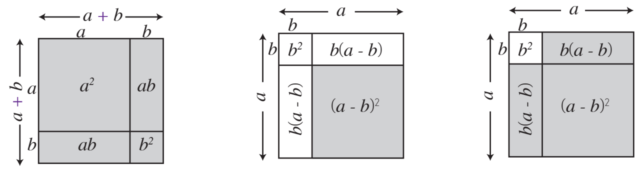
Note que $\sqrt{49}$ no es ± 7
$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{x}$ siempre es mayor o igual a 0.

11 **Utiliza identidades como:**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Para resolver problemas y las justifica algebraica o geométricamente. Reconoce errores comunes como $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Justificación geométrica:



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

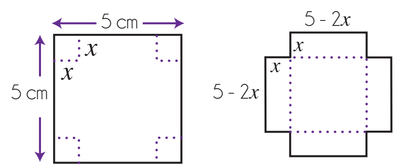
$(a-b)^2 = a^2 - 2(b(a-b)) - b^2 = a^2 - 2ba + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ba + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2(b(a-b)) = (a-b)((a-b)+2b) = (a-b)(a+b)$

Justificación algebraica:

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b$
  $= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

Por ejemplo: Se va a construir un molde para una caja (sin tapa) a partir de un cuadrado de 5 cm de lado quitándole en cada esquina un cuadradito de lado x cm. Se quiere determinar para qué valores de x el área superficial de la caja será igual a 9 cm^2.

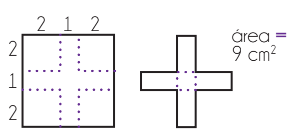


área superficial $= 5^2 - 4x^2 = 9$
$25 - 4x^2 = 9$
$16 - 4x^2 = 0$
$(4)^2 - (2x)^2 = 0$
$(4-2x)(4+2x) = 0$

área superficial = 9
$(4-2x)(4+2x) = 0$

$4 - 2x = 0 \longrightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \longrightarrow$

$4 + 2x = 0 \longrightarrow x = -\frac{4}{2} = -2 \longrightarrow$ No tiene sentido pues x debe ser positivo.



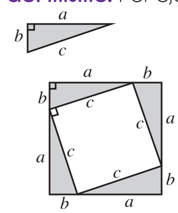
12 **Multiplica, divide, suma y resta fracciones que involucran variables (fracciones algebraicas) en la resolución de problemas.** Por ejemplo: Había 8 tortas para repartir entre n niños. Tres niños se fueron antes de la repartición. ¿Cuánto más recibe cada niño? ¿Cuál es la porción extra?

Antes, cada niño recibía $\frac{8}{n}$; Ahora, cada niño recibe $\frac{8}{n-3}$

porción extra $= \frac{8}{n-3} - \frac{8}{n} = \frac{8n}{(n-3)n} - \frac{8(n-3)}{(n-3)n} = \frac{8n - 8(n-3)}{(n-3)n} = \frac{8n - 8n + 24}{(n-3)n} = \frac{24}{(n-3)n}$

Así, si había originalmente 15 niños, cada niño recibe 2/15 más de torta ($\frac{24}{(15-3)15} = \frac{24}{12 \times 15} = \frac{2}{15}$). Si había originalmente 48 niños, cada niño recibe 1/90 más de torta ($\frac{24}{(48-3)48} = \frac{24}{45 \times 48} = \frac{1}{90}$).

13 **Conoce el teorema de Pitágoras y alguna prueba gráfica del mismo.** Por ejemplo:

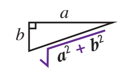


área del cuadrado interno $= c^2 =$ área del cuadrado grande $-$ área de los cuatro triángulos

área del cuadrado interno $= c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2}$
$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$

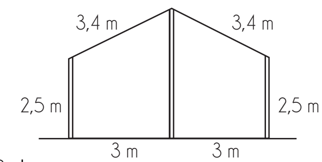
área del cuadrado interno $= c^2 = a^2 + b^2$

lado del cuadrado interno $= c = \sqrt{a^2 + b^2}$



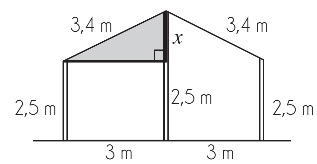
Usa el teorema de Pitágoras para verificar si un triángulo es o no rectángulo y para solucionar problemas. Por ejemplo:

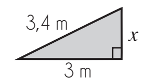
Construcción



¿Cuánto mide la columna central?

Solución





$3^2 + x^2 = 3{,}4^2$
$x^2 = 3{,}4^2 - 3^2 = 2{,}56$
$x = \sqrt{2{,}56} = 1{,}6$

Conclusión

La columna central mide 4,1 m $\quad$ 1,6 m + 2,5 m

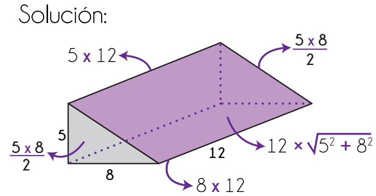
Nota: Aunque la solución de $x^2 = 2{,}56$ es $x = \pm\sqrt{2{,}56} = \pm 1{,}6$, en este caso x es una distancia, entonces se toma la solución positiva.

14 **Conoce las fórmulas para calcular áreas de superficie y volúmenes de cilindros y prismas.**

15 **Usa representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales para solucionar problemas geométricos.** Por ejemplo: Calcula el volumen y el área superficial de un prisma rectangular a partir de sus vistas:

Vista frontal $\quad$ Vista lateral

Solución:



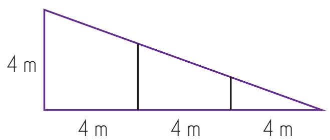
Volumen (V):
V = área base × altura
$V = 20 \times 12 = 240$

Área superficial (AS):
AS $= 20 + 20 + 60 + 96 + 12 \times \sqrt{89}$
AS $= 196 + 12\sqrt{89}$

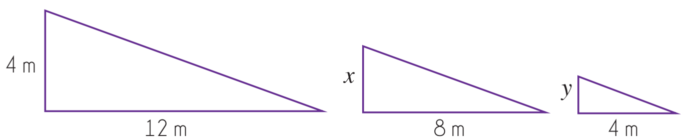
MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

16 **Usa el teorema de Tales (sobre semejanza) para solucionar problemas.** Por ejemplo: En la figura se muestra una rampa. ¿Cuáles deben ser las medidas de los soportes intermedios?



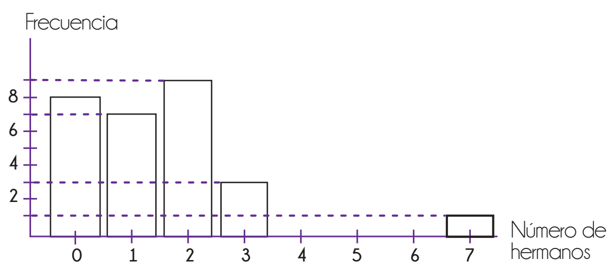
Estos tres triángulos son semejantes.



$$\frac{x}{4\text{ m}} = \frac{8\text{ m}}{12\text{ m}} \qquad x = \frac{8\text{ m}}{12\text{ m}} \times 4\text{ m} = \frac{8}{3}\text{ m}$$

$$\frac{y}{4} = \frac{4}{12} \qquad y = \frac{4}{12} \times 4 = \frac{4}{3}\text{ m}$$

17 **Calcula la media de datos agrupados e identifica la mediana y la moda.** Por ejemplo: En el salón de clase hay ocho estudiantes que no tienen hermanos, siete estudiantes que tienen un sólo hermano, nueve estudiantes que tienen dos hermanos, tres estudiantes que tienen tres hermanos, y un estudiante que tiene siete hermanos. Ninguno tiene ni cuatro, ni cinco, ni seis hermanos.



Datos ordenados de menor a mayor:

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{8\text{ veces}}\ \underbrace{1, \ldots, 1,}_{7\text{ veces}}\ \underbrace{2, \ldots, 2,}_{9\text{ veces}}\ \underbrace{3, \ldots, 3,}_{3\text{ veces}}\ \underbrace{7}_{\text{una vez}}$$

$$\underbrace{0, \ldots, 0,\ 1, \ldots, 1,}_{14\text{ veces}}\ \underbrace{1,\ 2, \ldots, 2,\ 3, \ldots, 3,\ 7}_{14\text{ veces}}$$

$$\frac{1+1}{2} \longleftarrow \text{mediana} = 1 \text{ hermano}$$

moda = 2 hermanos

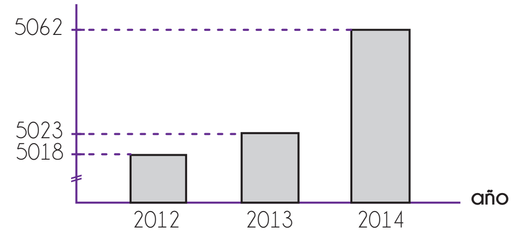
$$\textbf{media} = \frac{\text{total hermanos}}{\text{total estudiantes}} = \frac{(8\times 0)+(7\times 1)+(9\times 2)+(3\times 3)+(1\times 7)}{8+7+9+3+1}$$

$$= \frac{0+7+18+9+7}{28} = \frac{41}{28} \approx 1{,}46 \text{ hermanos/estudiante}$$

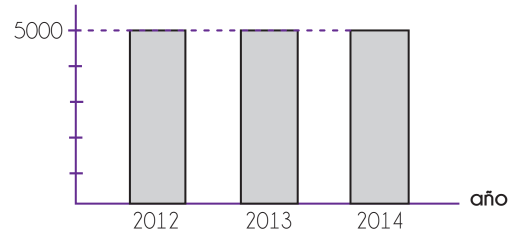
- Como la mediana es 1 hermano entonces el 50% de los estudiantes tienen un hermano o menos, y el 50% de los estudiantes tienen un hermano o más. En promedio, los estudiantes de la clase tienen 1,46 hermanos.
- La moda es 2 hermanos pues es el dato más frecuente.
- Comprende que es un error calcular la media así: $\frac{8+7+9+3+0+1}{6}$.
- Comprende que el estudiante que tiene 5 hermanos es un caso aislado que aumenta a la media pero no afecta a la mediana.

18 **Comprende que distintas representaciones de los mismos datos se prestan para distintas interpretaciones.** Por ejemplo: Se muestran dos representaciones del número de teléfonos celulares que se vendieron cada año en la tienda:

• (1) # de celulares vendidos



• (2) # de celulares vendidos



Aunque ambas representaciones son correctas, la escala utilizada en el eje vertical en cada caso produce interpretaciones distintas. El presidente de la compañía podría utilizar la representación (1) en una publicidad de la compañía, argumentando que el negocio va muy bien (las ventas crecen más cada año). La representación (2) podría usarla con sus empleados, argumentando que las ventas se han mantenido casi estables alrededor de 5 000 celulares al año, y diseñando con ellos nuevas estrategias de venta.

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 9 ••

1 **Reconoce el significado de los exponentes racionales positivos y negativos, y utiliza las leyes de los exponentes.** Por ejemplo:

$7 \times 7^3 = 7^{3+1} = 7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$ | $\frac{7^2}{7^6} = 7^{2-6} = 7^{-4} = \frac{1}{7^4} = 0{,}000416...$

$(7^{1/5})^{1/2} = 7^{1/5 \times 1/2} = 7^{1/10} = \sqrt[10]{7} = 1{,}215...$ | $7^{-1/10} = \frac{1}{7^{1/10}} = 0{,}823$

Utiliza la notación científica para representar y operar con magnitudes en distintos contextos. Por ejemplo:

- La distancia aproximada entre el Sol y la Tierra es 149 600 000 km.

$$149\,600\,000 \text{ km} = 149{,}6 \times 10^6 \text{ km} = 1{,}496 \times 10^8 \text{ km}$$

- Las células hepatocitos que se encuentran en el hígado tienen un diámetro de 0, 000 000 02m.

$$0{,}000\,000\,02 \text{ m} = 0{,}02 \times 10^{-6} \text{ m} = 2 \times 10^{-8} \text{ m}$$

Utiliza las leyes de los exponentes en diversas situaciones, incluyendo la simplificación de expresiones. Por ejemplo:

La luz viaja aproximadamente a 300 000 km /s y tarda cerca de 500 segundos en llegar a la tierra ¿Cuál es la distancia aproximada, en notación científica del sol a la tierra?

Si la distancia corresponde a la velocidad por el tiempo transcurrido se tiene:

$d = v \times t \qquad v \approx 3 \times 10^5 \text{ km/s} \qquad t \approx 5 \times 10^2 s$

$d = 3 \times 10^5 \text{ km/s} \times 5 \times 10^2 s = 15 \times 10^{5+2} \text{ km} = 15 \times 10^7 \text{ km} = 1{,}5 \times 10^8 \text{km}$

La distancia aproximada entre el sol y la tierra es de $1{,}5 \times 10^8$km

Reconoce errores comunes como:

Error	Lo correcto es:
$10^4 = 40$	$10^4 = 10\,000$
$10^0 = 0$	$10^0 = 1$
$-10^2 = 100$	$-10^2 = -100$
$(-10)^2 = -100$	$(-10)^2 = 100$
$10^2 + 10^3 = 10^5$	$10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100$

2 **Reconoce el significado del logaritmo de un número positivo en cualquier base y lo calcula sin calculadora en casos simples y con calculadora cuando es necesario, utilizando la relación con el logaritmo en base 10 (log) o el logaritmo en base e (ln).**

$p^{\square} = q$

$\log_p(q)$ es el exponente al cual se debe elevar *p* para obtener *q*

Por ejemplo:

$7^{?} = 19 \longrightarrow ? = \log_7(19)$

$$\log_7(19) = \frac{\log(19)}{\log(7)} \approx 1{,}513 \quad \text{o} \quad \log_7(19) = \frac{\ln(19)}{\ln(7)} \approx 1{,}513$$

cálculo de $\log_7(19)$ con la calculadora

Utiliza y comprende las leyes de los logaritmos a partir de las leyes de los exponentes de las que provienen.

3 **Identifica cuando una relación es una función, reconoce que una función se puede representar de diversas maneras, y encuentra su dominio y su rango.**

4 **Realiza conversiones de unidades de una magnitud que incluye potencias y razones.** Por ejemplo, si una llave vierte agua en un estanque a una razón de 110 cm^3/min, ¿cuántos metros cúbicos suministra la llave en una hora?

$1\text{cm} = 0{,}01\text{m}$

$(1\text{cm})^3 = (0{,}01\text{m})^3$

$1\text{cm}^3 = 0{,}000001 \text{ m}^3$

$1 = \frac{0{,}000001 \text{ m}^3}{1\text{cm}^3}$

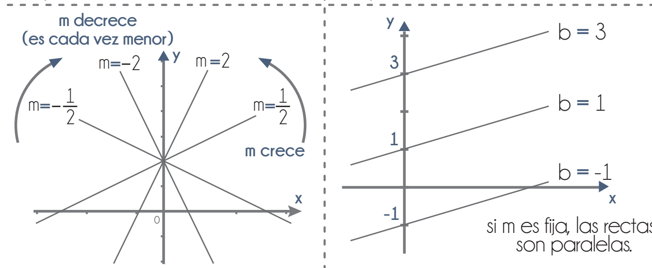
$$\frac{110 \text{ cm}^3}{\text{min}} = \frac{110 \text{ cm}^3}{\text{min}} \times \frac{0{,}000001 \text{ m}^3}{1\text{cm}^3} \times \frac{60\text{min}}{1\text{h}}$$

$$= \frac{0{,}0066 \text{ m}^3}{1\text{h}} = 0{,}0066 \text{ m}^3/\text{h} = 6{,}6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{h}$$

La llave vierte 0,0066 metros cúbicos en una hora.

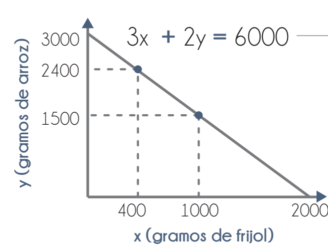
5 **Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de las familias de funciones lineales f(x)=mx+b al igual que los cambios que los parámetros m y b producen en la forma de sus gráficas.**

y = mx + b con b fija | y = mx + b con m fija



Reconoce que las ecuaciones ax+by=c definen líneas rectas en el plano e identifica que las que no son verticales, siempre se pueden escribir en la forma y=mx+b. Por ejemplo, se tienen $6000 pesos para comprar arroz y fríjol. Cada gramo (g) de fríjol cuesta 3 pesos y cada gramo de arroz cuesta 2 pesos.

Comprende que hay varias posibles combinaciones de cantidades de arroz y fríjol que costarían $6000. Por ejemplo, si se compran 400g de fríjol y 2400g de arroz (3 x 400 + 2 x 2400 = 1200 + 4800 = 6000) o si se compran 1000g de fríjol y 1500g de arroz (3x1000+2x1500=3000+3000=6000). Comprende que la gráfica de puntos de todas las posibles soluciones es en una línea recta.



$2y = -3x + 6000$

$y = -\frac{3}{2}x + 3000$

pendiente · corte con el eje vertical

Si aumenta en 2 la cantidad de gramos de fríjol que se compra, la cantidad de arroz que se puede comprar se reduce en 3 gramos para que se mantenga la relación.

Comprende que las funciones lineales modelan situaciones con razón de cambio constante. Por ejemplo: Una compañía telefónica inicia con 500 usuarios y el número crece a razón de 300 usuarios cada dos meses. Por ser una razón de cambio constante, esta situación se puede modelar con una función lineal $C(t)=500+150t$ donde t representa el tiempo en meses y 150 es la razón de cambio constante.

MINEDUCACIÓN

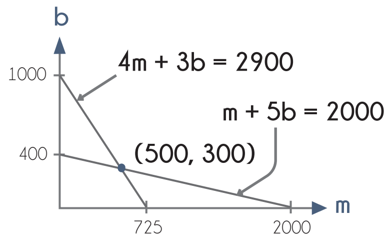
TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 9 ••

Plantea sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y los resuelve utilizando diferentes estrategias. Por ejemplo, cuatro manzanas y tres bananos cuestan $2900. Una manzana y cinco bananos cuestan $2000. ¿Cuánto cuesta una manzana? ¿Cuánto cuesta un banano?

sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4m + 3b = 2900 \\ m + 5b = 2000 \end{cases}$



$$m + 5b = 2000$$
$$m = 2000 - 5b$$

$$4m + 3b = 2900$$
$$4(2000 - 5b) + 3b = 2900$$
$$8000 - 20b + 3b = 2900$$
$$8000 - 17b = 2900$$
$$-17b = -5100$$
$$b = \frac{-5100}{-17}$$
$$b = 300$$

$$m + 5b = 2000$$
$$m + 5(300) = 2000$$
$$m + 1500 = 2000$$
$$m = 500$$

Reconoce cuándo un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución. Por ejemplo: La posición de dos autobuses que tienen la misma ruta está dada por las ecuaciones $d=10t + 15$ y $t=(d/10)+1{,}5$ respectivamente, donde t es el tiempo. Durante su recorrido, ¿al cabo de cuánto tiempo se encontrarán los autobuses?

Se despeja d en las dos ecuaciones

$d = 10t + 15$ $\qquad$ $t = d/10 + 1{,}5$

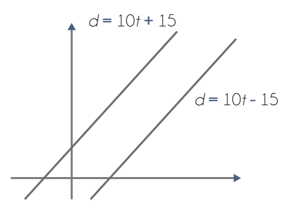
$d = 10t - 15$

Igualando las dos distancias, se tiene

$10t + 15 = 10t - 15$

$15 = -15$

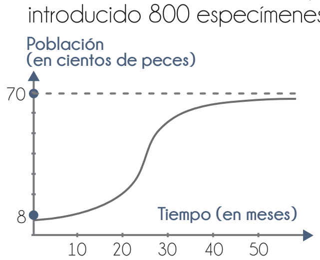
Se presenta una contradicción, por lo tanto no hay solución



Las rectas son paralelas por lo cual no hay punto de corte

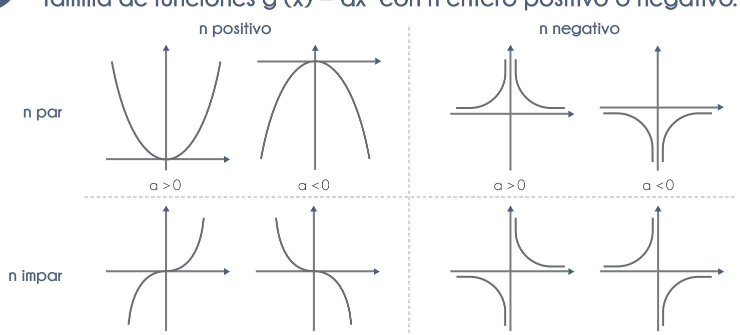
Se concluye que los autobuses nunca se encuentran durante su recorrido.

7 **Describe características de la relación entre dos variables a partir de una gráfica.** Por ejemplo, la gráfica a continuación muestra la cantidad de peces en un lago luego de haber introducido 800 especímenes.



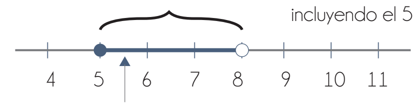
- La población de peces estuvo siempre en aumento.
- A pesar de crecer constantemente, la población tiende a estabilizarse alrededor de 7000 peces.
- Entre los meses 20 y 30 fue cuando más aumentó la población.

8 **Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones g (x) = ax^n con n entero positivo o negativo.**



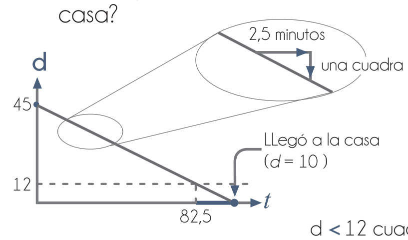
Comprende la noción de intervalo en la recta numérica, y representa intervalos de diversas formas (verbal, inecuaciones, de forma gráfica y con notación de intervalo).

$5 \leq x < 8$ $\quad$ Intervalo [5, 8) $\quad$ Todos los números reales entre 5 y 8, incluyendo el 5 y sin incluir el 8.



$2+2\sqrt{3}$ está en el intervalo [5,8), pues es aproximadamente 5,464.

Resuelve y formula problemas que involucran inecuaciones lineales de una variable utilizando las propiedades básicas de las desigualdades y representando su solución de forma gráfica en la recta numérica. Por ejemplo: Helena está a 45 cuadras de su casa. Si a las 3:00pm empieza a caminar hacia su casa recorriendo una cuadra cada dos minutos y medio, ¿cuándo estará a menos de 12 cuadras de su casa?



Al multiplicar o dividir por un número negativo se invierte la desigualdad

$$45 - \frac{1}{2{,}5}t < 12$$
$$45 - 0{,}4t < 12 \quad -45$$
$$-0{,}4t < -33$$
$$t < \frac{-33}{-0{,}4} \quad \div(-0{,}4)$$
$$t < 82{,}5$$

d < 12 cuadras

t > 82,5 minutos

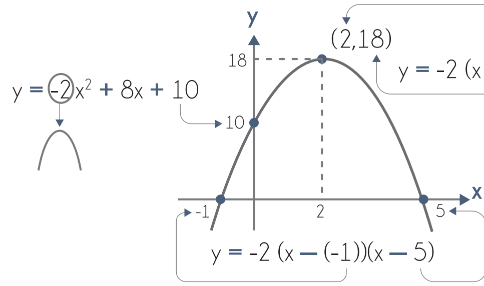
82,5 min = 60 min + 22 min + 0,5 min

= 1h + 22 min + 30s

Conclusión: Helena estará a menos de 12 cuadras de su casa a partir de las 4:22:30pm.

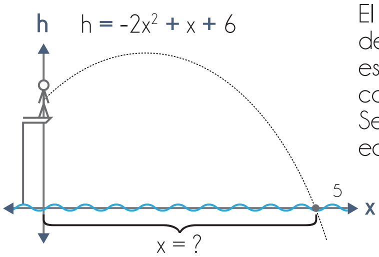
10 **Calcula el área de superficie y el volumen de pirámides, conos y esferas. Entiende que es posible determinar el volumen o área de superficie de un cuerpo a partir de la descomposición del mismo en sólidos conocidos.** Por ejemplo, estima el área de superficie de su cuerpo y contrasta su estimación con lo que predice la fórmula de Du Bois que afirma que el área superficial del cuerpo en metros cuadrados es aproximadamente igual a 0,007184 x (altura en cm)$^{0{,}725}$ x (peso en kg)$^{0{,}425}$.

11 **Expresa una función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) de distintas formas ($y = a(x + d)^2 + e$, o $y = a(x - f)(x - g)$) y reconoce el significado de los parámetros a, c, d, e, f y g, y su simetría en la gráfica.** Por ejemplo:



Utiliza distintos métodos para solucionar ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, la trayectoria que sigue un clavadista cuando realiza un salto desde un trampolín se puede representar mediante la ecuación $h = -2x^2 + x + 6 = 0$, donde h es la altura en metros y x es el desplazamiento horizontal. ¿Cuál es la distancia horizontal entre el trampolín y el punto en el que entra el clavadista al agua?

cuando realiza un salto desde un trampolín se puede representar mediante la ecuación $h = -2x^2 + x + 6 = 0$, donde h es la altura en metros y x es el desplazamiento horizontal. ¿Cuál es la distancia horizontal entre el trampolín y el punto en el que entra el clavadista al agua?



El desplazamiento horizontal del clavadista al caer al agua está dado por el valor de x que corresponde a la altura h = 0. Se debe solucionar la ecuación:

$$h = -2x^2 + x + 6 = 0$$

$$-2x^2 + x + 6 = 0$$

Usando fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a = -2,\ b = 1,\ c = 6$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

Factorizando:

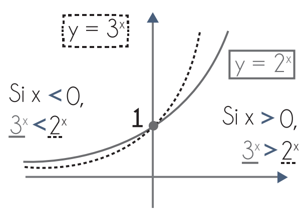
$$-(2x^2 - x - 6) = 0$$

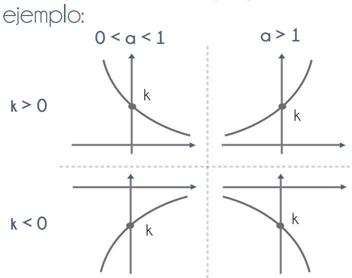
$$-(2x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \qquad x = 2$$

Como el desplazamiento en este caso no puede ser negativo, la solución $x = -3/2$ no tiene sentido en el contexto. Así, el clavadista entra al agua a 2m de la base del trampolín.

12 **Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones exponenciales $h(x) = ka^x$ con $a > 0$ y distinto de 1, al igual que los cambios de los parámetros a y k producen en la forma de sus gráficas.** Por ejemplo:





En general comprende las propiedades y características de las gráficas para todos los casos.

Utiliza funciones exponenciales para modelar situaciones y resolver problemas. Por ejemplo:

- La población de hormigas de la Isla Suárez se triplica cada año. El primero de enero del año 2000 había un millón de hormigas en la isla. ¿En qué año la población de hormigas alcanzará los 800 millones?

Años desde el 1ro de enero del año 2000	t	0	1	2	3	...	t
Población de hormigas (en millones)	H	1	3	9	27	...	3^t

x3 x3 x3 x3 ← $H(t) = 3^t$

Estimado:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	...
H	1	3	9	27	81	243	729	2187	...

800 debe aparecer entre $t = 6$ y $t = 7$ más cerca de $t = 6$

Exacto:

$$3^t = 800$$

$$t = \log_3(800)$$

$$t \approx 6{,}08$$

- Se invierte una cierta cantidad de dinero P en una cuenta con una tasa de crecimiento anual del 6%.

  Al final del primer año, la cantidad de dinero en la cuenta será: P + (6% de P) = P+0,06P=1,06P.

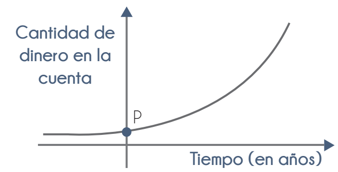
  Al final del segundo año, la cantidad de dinero en la cuenta será: 1,06P + (6% de 1,06P) = 1,06P + (0,06 x 1,06P) = 1,06P(1+0,06) = $P(1{,}06)^2$.

Año	Cantidad de dinero en la cuenta
0	P
1	$P(1{,}06)$
2	$P(1{,}06)^2$
3	$P(1{,}06)^3$
4	$P(1{,}06)^4$
...	...

La cantidad de dinero C en la cuenta se puede modelar por medio de la función exponencial.

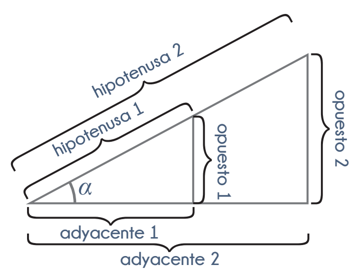
$$C(t) = P(1{,}06)^t$$

Donde t es el tiempo transcurrido en años.



- ¿Cuánto crece la inversión al cabo de 7 años?
  $C(7) = P(1{,}06)^7 \approx 1{,}50P$. Es decir, la inversión crece aproximadamente 50% (no es 6 veces 7%).
- ¿Cuánto tarda la inversión en duplicarse?
  Se debe solucionar la ecuación $2P = P(1{,}60)^t$ para encontrar el valor de t. Dividiendo por P a ambos lados de la igualdad se obtiene $2 = (1{,}06)^t$. Así, $t = \log_{1{,}06}(2) \approx 11{,}9$ años.

13 **Conoce las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.** Comprende que para un cierto ángulo α, las razones $\text{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$ son independientes de las medidas de los lados del triángulo.



Por semejanza de triángulos:

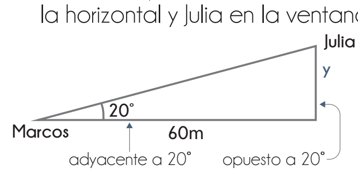
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{opuesto 1}}{\text{hipotenusa 1}} = \frac{\text{opuesto 2}}{\text{hipotenusa 2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adyacente 1}}{\text{hipotenusa 1}} = \frac{\text{adyacente 2}}{\text{hipotenusa 2}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opuesto 1}}{\text{adyacente 1}} = \frac{\text{opuesto 2}}{\text{adyacente 2}}$$

Utiliza el seno, el coseno y la tangente para solucionar problemas que involucran triángulos rectángulos. Por ejemplo:

- Julia está en el octavo piso de un edificio mirando a Marcos por la ventana. Para calcular a qué altura se encuentra Julia, Marcos se para a 60m del edificio y estima que el ángulo entre la horizontal y Julia en la ventana es de 20°.



$$\tan(20°) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{y}{60\text{m}}$$

$$0{,}364 = \frac{y}{60\text{m}}$$

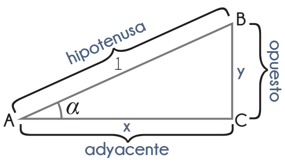
$$0{,}364 \times 60\text{m} = y \longrightarrow y = 21{,}84\text{m}$$

Si la altura de Marcos es 1,6m entonces Julia se encuentra aproximadamente 1,6m + 21,84m = 23,44m de altura.

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Justifica geométrica o algebraicamente propiedades de las razones trigonométricas. Por ejemplo, muestra geométricamente por qué el seno de un ángulo en un triángulo rectángulo siempre es menor o igual a 1 o que $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ para cualquier ángulo en un triángulo rectángulo.



$\triangle$ ABC es un triángulo rectángulo

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} = y$$

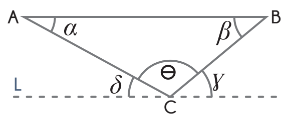
$$\cos\ \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} = x$$

Por el teorema de Pitágoras $1 = x^2 + y^2 = (\cos\ \alpha)^2 + (\text{sen}\ \alpha)^2$

14 Realiza demostraciones geométricas sencillas a partir de principios que conoce.

Realiza demostraciones geométricas sencillas a partir de principios que conoce. Por ejemplo:

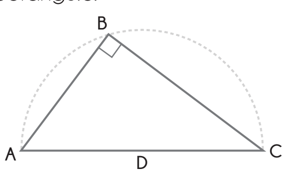
- Demuestra que la suma de los ángulos en un triángulo es 180°.

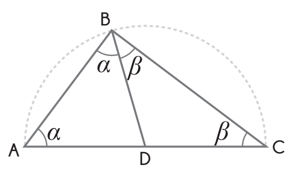


1. Se traza una recta L paralela al lado AB y que pase por el punto C.
2. Los pares de ángulos α y δ, β y γ tienen la misma medida, por la relación entre los ángulos formados por rectas paralelas al ser intersectadas por una secante.
3. Los ángulos δ, θ y γ forman un ángulo que mide 180°.

Conclusión: la suma de las medidas de los ángulos α, θ y β es de 180°.

- Demuestra el teorema de Tales que dice que un diámetro de un círculo y cualquier punto sobre la circunferencia forman un triángulo rectángulo.





1. Los segmentos AD, DB y DC tienen la misma medida por ser radios de la semicircunferencia ABC.
2. Los triángulos ADB y DBC son isóceles.
3. Como tenemos triángulos isóceles, el ángulo α mide lo mismo que el ángulo ABD y el ángulo β mide lo mismo que el ángulo CBD.
4. Los ángulos del triángulo ABC miden 180°, de donde:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$$
$$2\alpha + 2\beta = 180°$$
$$\alpha + \beta = 90°$$

Conclusión: el ángulo ABC mide 90°.

15 Resuelve problemas utilizando principios básicos de conteo (multiplicación y suma).

Resuelve problemas utilizando principios básicos de conteo (multiplicación y suma). Por ejemplo, ¿de cuántas maneras se puede ir de la ciudad A a la ciudad D pasando por las ciudades B y C si existen 3 caminos distintos de A a B, 4 caminos distintos de B a C y 5 caminos distintos de C a D?

Hay cuatro maneras distintas de llegar a C por cada uno de los tres caminos para llegar de A a B, es decir, el número de formas de ir de A a C pasando por B debe ser 3 × 4 = 12. Para cada uno de estos 12 caminos se tienen 5 formas distintas para ir de C a D.

3 x 4 x 5 = 60

El número total de caminos distintos de A a D es 60.

16 Reconoce las nociones de espacio muestral y de evento, al igual que la notación P(A) para la probabilidad de que ocurra un evento A.

Reconoce las nociones de espacio muestral y de evento, al igual que la notación P(A) para la probabilidad de que ocurra un evento A. Por ejemplo, ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado rojo y uno azul, la suma de los dados sea 6?

El espacio muestral es el conjunto de todas las posibilidades, que se pueden representar por medio de parejas (número dado rojo, número dado azul).

Espacio muestral:

1,1	1,2	1,3	1,4	**1,5**	1,6
2,1	2,2	2,3	**2,4**	2,5	2,6
3,1	3,2	**3,3**	3,4	3,5	3,6
4,1	**4,2**	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Evento A (sombreado): la suma de los dados es 6.

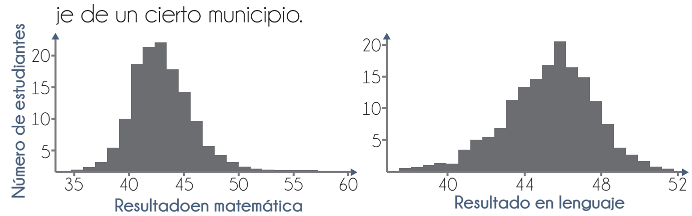
$$P(A) = \frac{\text{número de elementos en A}}{\text{número de elementos en el espacio muestral}}$$

$$P(A) = \frac{5}{36} \approx 0{,}14 = 14\%$$

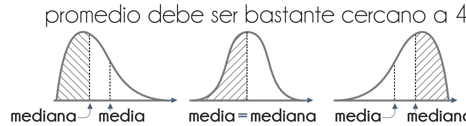
La probabilidad de que la suma de los dos dados sea 6 es aproximadamente 14%.

17 Reconoce los conceptos de distribución y asimetría de un conjunto de datos, y reconoce las relaciones entre la media, mediana y moda en relación con la distribución en casos sencillos.

Reconoce los conceptos de distribución y asimetría de un conjunto de datos, y reconoce las relaciones entre la media, mediana y moda en relación con la distribución en casos sencillos. Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra los resultados en las pruebas Saber 9[no] de matemáticas y lenguaje de un cierto municipio.



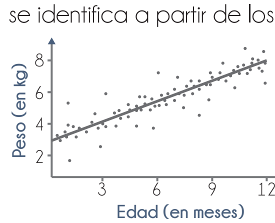
Reconoce que ambos datos tienen una distribución en forma de campana, pero una es aproximadamente simétrica mientras que la otra es asimétrica. A partir de la asimetría y forma de la distribución de los resultados en matemáticas, deduce que el promedio debe ser bastante cercano a 45.



La mediana es la que hace que las áreas sombreadas y no sombreadas sean iguales (separa los datos en el 50% inferior y el 50% superior).

18 Realiza inferencias simples a partir de información estadística de distintas fuentes.

Realiza inferencias simples a partir de información estadística de distintas fuentes. En particular, puede interpretar el significado del signo y valor de la pendiente de una línea de tendencia en un diagrama de dispersión. Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra datos recolectados sobre el peso y la edad (en meses y semanas) de varios bebés con menos de doce meses de edad, junto con una línea de tendencia que se identifica a partir de los datos.



La pendiente de la línea de tendencia es aproximadamente 0,2kg/mes. Esto quiere decir que según el modelo lineal, se espera que entre un mes y otro, el peso de un bebé aumente en 0,2 kg.

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

• • MATEMÁTICAS – GRADO 10 • •

1

Reconoce que no todos los números son racionales, es decir, no todos los números se pueden escribir como una fracción de enteros a/b. Por ejemplo, conoce una demostración del hecho de que $\sqrt{2}$ no es racional.

Suponer que $\sqrt{2}$ se escribe como una fracción lleva a una contradicción.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \longrightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \longrightarrow \quad 2b^2 = a^2$$

En cualquier número al cuadrado el número de primos en que se descompone es par (si descompone cualquier número en primos, y se eleva al cuadrado, entonces cada primo se elevará al cuadrado). Por lo tanto en a^2 y en b^2 hay un número par de 2's. Así en el lado izquierdo de la última ecuación $(2b^2)$ hay un número impar de 2's mientras que en lado derecho (a^2) hay un número par de 2's. Esto muestra que esos dos lados no pueden ser iguales, y por lo tanto, $\sqrt{2}$ no puede inscribirse como una fracción.

Expresa un número racional con expansión decimal periódica o finita como una fracción. Reconoce que todo número (racional o irracional) tiene una expansión decimal y encuentra una sucesión de racionales que lo aproxima. Por ejemplo:

$$2 \quad 2{,}4 \quad 2{,}43 \quad 2{,}429 \quad 2{,}4286 \quad 2{,}42857 \quad \cdots \longrightarrow \frac{17}{7}$$

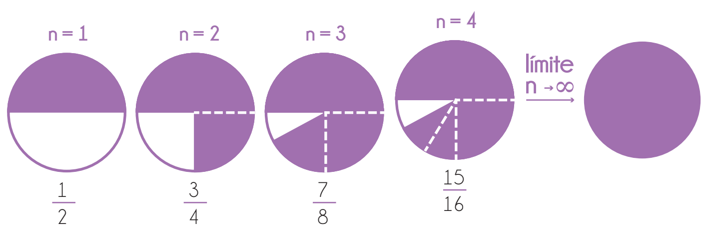
$$1 \quad 1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414 \quad 1{,}4142 \quad 1{,}41421 \quad \cdots \longrightarrow \sqrt{2}$$

Reconoce que los números racionales tienen expansión decimal que es finita o infinita eventualmente periódica, mientras que para los irracionales es infinita y no periódica.

2

Comprende el concepto de límite de una sucesión.

- Imagine que sombrea medio círculo, después la mitad de lo que estaba sin sombrear, y así sucesivamente. ¿Qué porción del círculo ha sombreado en cada paso y cuál es el límite si continúa indefinidamente?

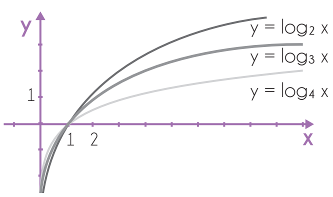


n	1	2	3	4	...
Porción del círculo coloreada: $\frac{2^n - 1}{2^n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ =0,75	$\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ =0,874	$\frac{7}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ =0,9375	...

Si continuamos este proceso indefinidamente, la porción del círculo sombreada estará cada vez más cerca del círculo completo.

3

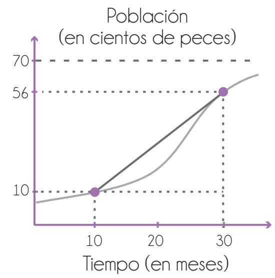
Reconoce la familia de funciones logarítmicas $f(x) = \log_a(x)$ junto con su dominio, rango, propiedades y gráficas.



- El punto de corte con el eje x es 1.
- A medida que x aumenta, el valor de la función aumenta.
- El dominio es (0,∞).
- El rango es el conjunto de los números reales.

4

Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula. Por ejemplo, la gráfica muestra la cantidad de peces en un lago luego de haber introducido 800 especímenes.



La **razón de cambio promedio** entre los meses 10 y 30 está dada por:

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en población}}{\text{cambio en tiempo}}$$

$$= \frac{5600 \text{ peces} - 1000 \text{ peces}}{20 \text{ meses}}$$

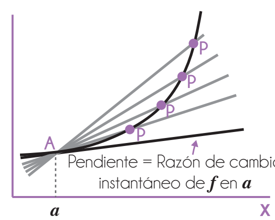
$$= 510 \text{ peces/mes}$$

La razón de cambio promedio es una aproximación al cambio real pero en muchas ocasiones no lo refleja con precisión. Por ejemplo, entre el mes 10 y el mes 11 la población creció menos que 510 peces y entre el mes 25 y 26 la población creció más que 510 peces. Sin embargo, al cabo de los 20 meses (entre el mes 10 y el 30) el cambio en la población fue igual al que se hubiera producido si la población hubiese crecido exactamente 510 peces cada mes.

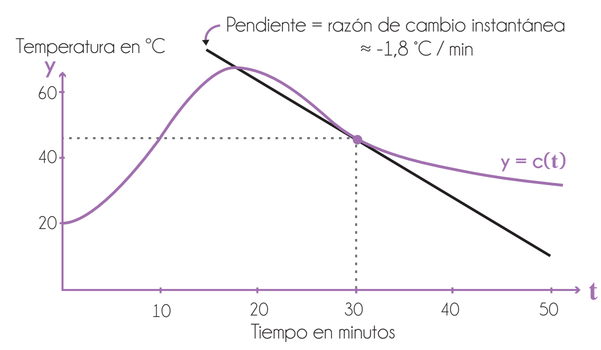
5

Reconoce la noción razón de cambio instantáneo de una función en un punto x=a:

- Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A.
- Como el valor al que tienden las razones de cambio promedio de la función entre x=a y puntos cada vez más cercanos a este.



Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra la temperatura C(t) de una sopa que se colocó sobre un fogón durante 20 minutos y después se retiró para que se enfriara.



La pendiente de la tangente en (30,C(30)) es aproximadamente -1,8°C/min, lo cual significa que la razón de cambio instantáneo de la temperatura con respecto al tiempo en **t**=30 es de -1,8°C/min. Es decir, alrededor de **t**=30 minutos la temperatura disminuyó aproximadamente 1,8°C cada minuto.

MINEDUCACIÓN

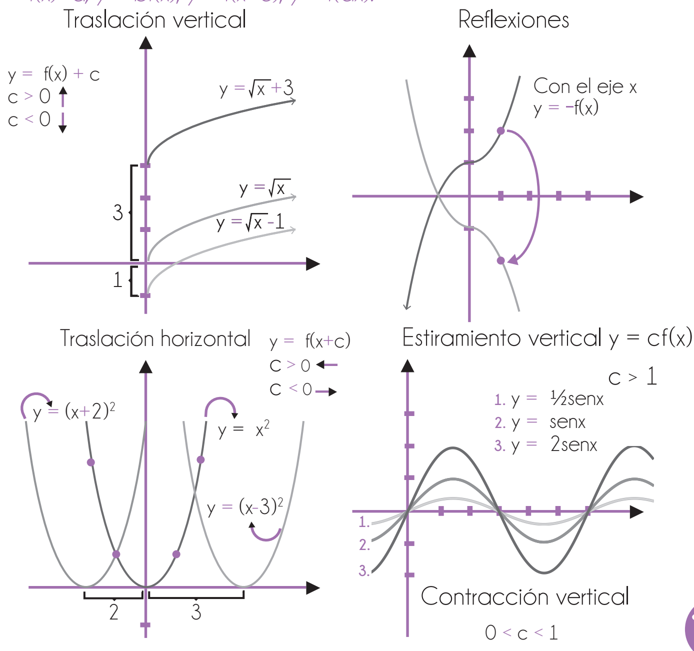
TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS – GRADO 10

6 Reconoce los cambios generados en las gráficas de funciones cuando su expresión algebráica presenta variaciones como:

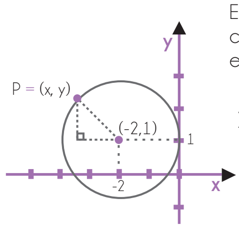
$y = f(x)+a$, $y = bf(x)$, $y = f(x+c)$, $y = f(dx)$.



7 Soluciona problemas geométricos en el plano cartesiano.

Por ejemplo, encuentra las coordenadas del punto medio entre dos puntos, encuentra la distancia entre dos puntos, determina cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares, determina cuándo tres puntos son colineales o encuentra la ecuación de un círculo de radio *r* con centro (a,b).

- ¿Cuál es la ecuación de un círculo de radio 2 con centro (-2,1)?



El círculo de radio 2 con centro (-2, 1) es el conjunto de todos los puntos P = (x, y) que se encuentran a distancia 2 del centro:

$$2 = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-1)^2}$$

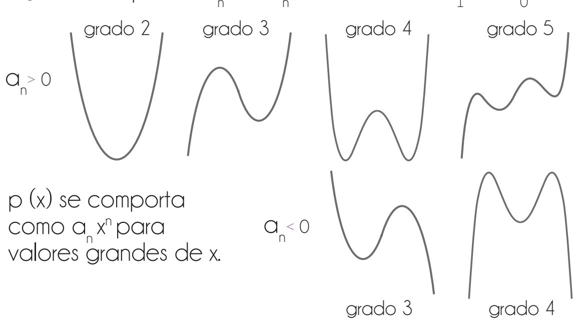
Distancia del centro (-2, 1) al punto P (por el teorema de Pitágoras)

Ecuación de círculo:

$$4 = (x+2)^2 + (y-1)^2$$

8 Reconoce características generales de las gráficas de las funciones polinómicas observando regularidades.

grado $\quad p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$



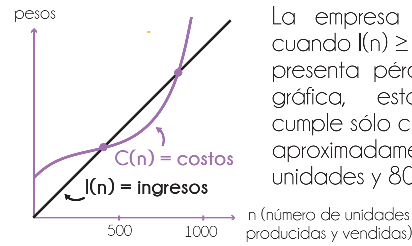
p (x) se comporta como $a_n x^n$ para valores grandes de x.

Suma, resta, multiplica y divide polinomios. Reconoce que un número "a" es una raíz de un polinomio p(x) si y solo si (x-a) es un factor de p(x) y utiliza este hecho para factorizar polinomios simples.

9 Soluciona inecuaciones del tipo $f(x) > 3$ o $f(x) \leq g(x)$, donde f y g son funciones dadas de forma gráfica o algebraica.

Por ejemplo:

- Los ingresos y los costos que genera una fábrica de zapatos están dados en función del número de unidades que produce y vende. Las ganancias de la empresa son la diferencia entre los ingresos y los costos.



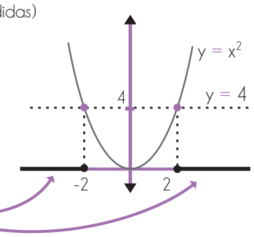
La empresa presenta ganancias cuando $I(n) \geq C(n)$ y de lo contrario presenta pérdidas. A partir de la gráfica, esta desigualdad se cumple sólo cuando n se encuentra aproximadamente entre 400 unidades y 800 unidades.

- Soluciona la inecuación $x^2 \geq 4$.

x^2 es mayor o igual a 4 en estos dos intervalos:

Solución:

$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$



10 Compara y comprende la diferencia entre la variación exponencial y lineal.

Por ejemplo:

- ¿Cuál de las siguientes funciones podría ser una función **lineal** y cuál una función **exponencial**?

X	*f(x)*	*g(x)*	*h(x)*
-2	16	15	48
-1	24	20	45
0	36	23	42
1	54	24	39
2	81	21	36

- La función f(x) no puede ser lineal porque a cambios constantes de x (incrementa 1) los valores de f(x) no estan variando de forma aditiva. Revisando los cocientes entre los valores de f(x) se ve que para pasar de un valor a otro siempre se multiplica por 1,5. Así, f(x) parece ser una función exponencial de la forma $f(x)=36(1{,}5)^x$.
- La función g(x) no puede ser ni exponencial ni lineal porque crece y decrece. Las funciones exponenciales y lineales siempre crecen o siempre decrecen.
- La función h(x) presenta cambios aditivos constantes (restar 3) cuando x incrementa 1. Así, h(x) parece ser una función lineal de la forma $h(x)=42-3x$.

- El precio de un carro antiguo en el año 1995 era 8 millones, y en el año 2015 es 24 millones. ¿Cuál será el precio del carro en el año 2035 si se asume que éste crece de manera exponencial o lineal?
  - Si se asume crecimiento lineal y se toma *t* como el tiempo en años desde el año 1995, entonces el precio del carro en millones es:

$$P(t) = 8 + 0{,}8t \qquad \text{Razón de cambio constante} = \frac{\text{Cambio en precio}}{\text{Número de meses}} = \frac{24-8}{20}$$

$= 0{,}8$ millones de pesos / año

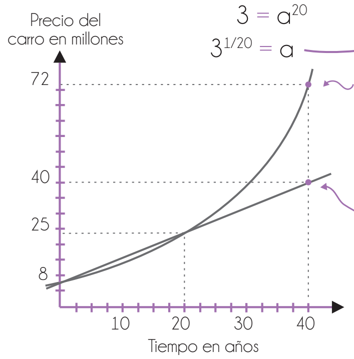
MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

- Si se asume crecimiento exponencial, la función que modela el precio en millones sería de la forma $Q(t) = 8a^t$ (pues $Q(0) = 8$ millones). Como $Q(20) = 24$ millones, se obtiene:

$24 = 8a^{20}$
$3 = a^{20}$
$3^{1/20} = a$

$Q(t) = 8\,(3^{1/20})^t$
$Q(t) = 8 \times 3^{t/20}$



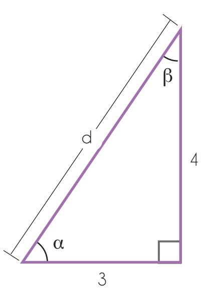
Asumiendo crecimiento exponencial:
$Q(40) = 72$
El precio del carro en año 2035 sería 72 millones.

Asumiendo crecimiento lineal:
$P(40) = 40$
El precio del carro en año 2035 sería 40 millones.

11 Utiliza calculadoras y software para encontrar un ángulo en un triángulo rectángulo conociendo su seno, coseno o tangente.

Por ejemplo:

- Soluciona ecuaciones del tipo $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{5}{7}$ (utilizando la tecla de seno inverso en la calculadora).
- Dados dos lados en un triángulo rectángulo, encuentra el lado restante y todos los ángulos.



Hallar el lado a y los ángulos α y β

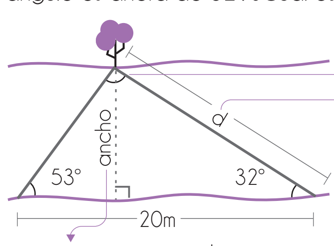
$\tan\alpha = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ $\quad$ $\alpha = 53,13°$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{d}$ $\quad$ $d = \frac{4}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\quad$ $d = \frac{4}{\operatorname{sen} 53,13°}$ $\quad$ $d \approx 5$

$\cos\beta = \frac{3}{d}$ $\quad$ $\beta = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ $\quad$ $\beta \approx 36,87°$

12 Comprende y utiliza la ley del seno y el coseno para resolver problemas de matemáticas y otras disciplinas que involucren triángulos no rectángulos.

Por ejemplo, calcula la distancia a un objeto lejano o inalcanzable utilizando la ley del seno. Se quiere conocer el ancho de un río, para lo cual un observador se sitúa justo en una de las orillas y estima que el ángulo entre la dirección del río y un árbol que observa en la otra orilla mide 53°. El observador camina 20m como se muestra en la figura y al observar de nuevo el árbol el ángulo es ahora de 32°. ¿Cuál es el ancho del río?



1. 180° - 53° - 32° = 95°
2. Utilizando el teorema del seno encontramos d

$$\frac{\operatorname{sen}53°}{d} = \frac{\operatorname{sen}95°}{20}$$
$$d = \frac{\operatorname{sen}53° \times 20}{\operatorname{sen}95°}$$
$$d \approx 16,03$$

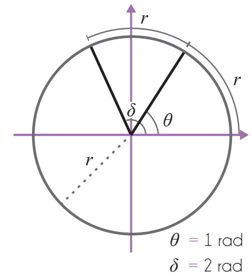
3. $\operatorname{sen}32° = \frac{\text{ancho}}{d}$

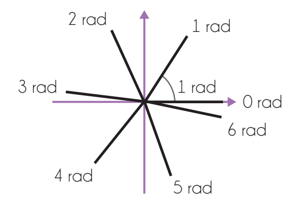
ancho = sen32° x 16,03

ancho = 8,49m

El ancho del río es aproximadamente 8,49m

13 Reconoce el radián como unidad de medida angular y conoce su significado geométrico.





Realiza conversiones entre grados y radianes. Por ejemplo:

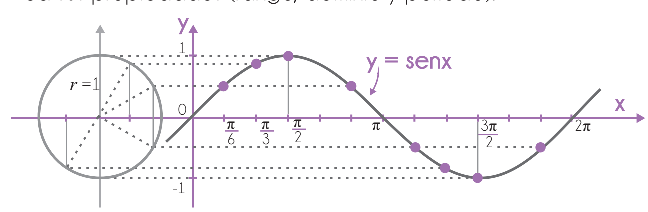
$360° = 2\pi$ rad $\quad$ $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 1$

$3\text{rad} = 3\text{rad} \times \frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \left(\frac{3 \times 360}{2\pi}\right)^{\circ} \approx 172°$

Halla la longitud de un segmento de circunferencia y el área de un sector de círculo (por ejemplo, utilizando proporcionalidad).

14 Comprende la definición de las funciones trigonométricas sen(x) y cos(x), en las cuales x puede ser cualquier número real y calcula a partir del círculo unitario, el valor aproximado de sen(x) y cos(x).

También traza sus gráficas e identifica sus propiedades (rango, dominio y periodo).



- La función seno es periódica con periodo 2π.
- El dominio de la función seno es el conjunto de todos los reales.
- El rango es [-1,1] ya que el valor máximo que puede tomar la función es 1 y el mínimo es -1.

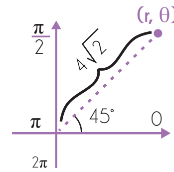
Comprende por qué $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ y deduce otras identidades entre funciones trigonométricas.

15 Utiliza el sistema de coordenadas polares y realiza conversiones entre éste y el sistema cartesiano, haciendo uso de argumentos geométricos y de sus conocimientos sobre las funciones trigonométricas.

Reconoce fortalezas y debilidades de este sistema de coordenadas.

- El punto con coordenadas cartesianas (4,4) tiene infinitas coordenadas polares.

$(r, \theta) = \left(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(4\sqrt{2}, \frac{-7\pi}{4}\right) = \left(4\sqrt{2}, \frac{9\pi}{4}\right) = \ldots$



$45° = 45° \times \frac{\pi \text{rad}}{180°} = \frac{\pi}{4}$ rad

- Una misma curva puede tener una ecuación simple o compleja dependiendo del sistema de coordenadas escogido.

MINEDUCACIÓN
TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

16 **Calcula e interpreta la probabilidad de que un evento ocurra o no ocurra en situaciones que involucran conteos con combinaciones y permutaciones.** Por ejemplo:

- Una lotería se juega con 45 balotas marcadas del 1 al 45 en la que cada concursante elige seis de éstas. El premio se otorga a las personas que acierten las seis balotas en cualquier orden. ¿Cuál es la probabilidad que una persona obtenga el premio?

  El espacio muestral es el conjunto de todas las selecciones de seis balotas de las cuarenta y cinco (sin contar el orden). Hay 45 combinado 6 posibles elecciones de esas seis balotas. Si A es **el evento** de acertar las seis balotas, tenemos que:

  $$P(A) = \frac{1}{\binom{45}{6}} = \frac{1}{8145060} \approx 0{,}000012\% \qquad \binom{45}{6} = \frac{45!}{6!\,(45-6)!} = 8\,145\,060$$

  $$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

  La probabilidad de que una persona obtenga el premio es aproximadamente 1 en 8 millones.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar cinco cartas de una baraja y que no salgan corazones?

  El espacio muestral es el conjunto de todas las posibles formas de seleccionar cinco cartas de una baraja. Su tamaño es $\binom{52}{5}$ pues se están eligiendo 5 cartas de una baraja que tiene un total de 52 sin que importe el orden.

  elegidas de las 39 cartas que nos son corazones

  $$\text{Probabilidad de elegir cinco cartas que no sean corazones} = \frac{\text{Número de elecciones de cinco cartas que no incluyen corazones}}{\text{Número de elecciones de cinco cartas}} = \frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 22\%$$

Entiende y utiliza la relación entre la probabilidad de que un evento ocurra y la probabilidad de que no ocurra: $P(A) + P(A^c) = 1$. Por ejemplo:

- Se lanza una moneda 7 veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga sello al menos una vez? El espacio muestral es el conjunto de todas las posibilidades, que se pueden codificar como cadenas de siete letras utilizando las letras C (cara) y S (sello), por ejemplo CCSCSSS. El evento A de las posibilidades en que sale sello al menos una vez es el conjunto de todas las cadenas de letras que tienen al menos una S. Es más fácil calcular la probabilidad de que no ocurra A (la probabilidad de complemento de A) pues el complemento de A es el conjunto de las cadenas que no tienen ninguna S (sólo hay una cadena entre las 2^7 opciones: CCCCCCC). Así,

  $$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{2^7} \approx 99{,}2\%$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que en una fiesta de 40 personas al menos dos personas cumplan el mismo día? (es decir, mismo día y mes). Es más facil calcular la probabilidad de que ese evento no ocurra, pues esto corresponde al evento que todos tengan fechas de cumpleaños distintas, la cual se puede calcular utilizando permutaciones:

  \# de opciones para el cumpleaños de la primera persona

  \# de opciones para el cumpleaños de la segunda persona (debe ser distinto al de la primera)

  $$\text{Probabilidad de que todos tengan cumpleaños distintos} = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times 326}{365^{40}} = \frac{365!\,/\,325!}{365^{40}}$$

  \# de posibilidades para los cumpleaños de 40 personas (sin importar si estos se repiten o no)

  $$\text{Probabilidad de que haya al menos dos cumpelaños iguales} = 1 - \text{Probabilidad de que todos tengan cumpleaños distintos} = 1 - \frac{365!\,/\,325!}{365^{40}} = 0{,}89123\ldots \approx 89\%$$

  Por lo tanto, la probabilidad de que en una fiesta de 40 personas al menos dos personas cumplan el mismo día es aproximadamente 89%.

Reconoce la relación de los conectores lógicos "y" y "o" entre eventos y las operaciones entre los conjuntos correspondientes ("y" corresponde a intersección y "o" corresponde a unión).

Comprende y utiliza la fórmula general para la probabilidad de que ocurran los eventos A o B. Por ejemplo:

Ocurren los eventos A o B   Ocurren los eventos A y B

En P(A) + P(B) se está sumando dos veces P(A∩B), luego

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta de una baraja, salga una *Q* o una *K*? Sea *A* el evento de que salga una *K* y *B* el evento de que salga una *Q*. Hay cuatro *K* y cuatro *Q* en las 52 cartas. *A∩B* es vacío, pues no puede salir al mismo tiempo una *Q* y una *K* si se elige sólo una carta. Así,

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - 0 \approx 15{,}4\%$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar dos cartas de una baraja salga una Q o una K? El espacio muestral es el conjunto de todas las selecciones de dos cartas en una baraja de 52 (sin contar el orden). Hay $\binom{52}{2}$ posibles elecciones de dos cartas. Sea A el evento de que salga una K y B el evento de que salga una Q. En esta ocasión A∩B no es vacío, consiste precisamente de todas las elecciones de una Q y una K.

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4 \times 51}{\binom{52}{2}} + \frac{4 \times 51}{\binom{52}{2}} - \frac{4 \times 4}{\binom{52}{2}} \approx 30\%$$

  El número de elecciones de dos cartas que tienen una Q es:

  $$4 \times 51$$

  \# de elecciones de la Q entre las 4 que hay

  \# de elecciones para la otra carta (puede ser cualquiera)

17 **Calcula y utiliza los percentiles para describir la posición de un dato con respecto a otros.** En particular, entiende que la mediana corresponde al percentil 50 y comprende cómo los percentiles ayudan a reconocer la distribución de los datos. Por ejemplo:

- Que la mediana de los salarios de cierta ciudad, sea 2 millones de pesos significa que la mitad de las personas tienen un salario inferior a 2 millones, y que el percentil 75 sea 2,5 millones, significa que el 25% de la población de dicha ciudad tiene un salario superior a 2,5 millones.
- Andrés consultó sus resultados de la prueba Saber 11, y fue informado que en la prueba de matemáticas está ubicado en el percentil 56. Esto significa que el 56% de todos los estudiantes que presentaron la prueba en el país obtuvieron un puntaje menor al suyo.

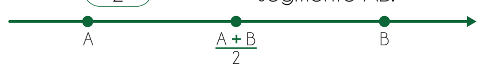
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

• • MATEMÁTICAS – GRADO 11 • •

1 **Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales.** Por ejemplo:

- Justifica que el promedio de dos números se encuentra exactamente en la mitad de los dos.

$$\frac{A+B}{2} = A + \boxed{\frac{B-A}{2}}$$ ← La mitad de la longitud del segmento AB.



- Encuentra un número entre dos números dada su expansión decimal. Por ejemplo, encuentra un número entre $\sqrt{2}$ y 1,415.

  La expansión decimal de $\sqrt{2}$ es 1,414213..., así que $\sqrt{2}$<1,145, El número 1,41 es menor que $\sqrt{2}$, luego no está entre los dos. El número 1,42 no está entre los dos porque es mayor que 1,415. Un posible número entre los dos es 1,4143:

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}4143 < 1{,}415 < 1{,}42$$

2 **Estima el tamaño de ciertas cantidades y juzga si los cálculos numéricos y sus resultados son razonables.** Estima el error posible en un cálculo.

Utiliza unidades de medida para razonar de manera cuantitativa y resolver problemas. Por ejemplo:

- Una aplicación que recolecta datos sobre un recorrido en bicicleta proporciona la siguiente información:

  Paso promedio = 4 min/km.
  ¿Cuál es el significado de paso promedio? ¿Cuál era la velocidad promedio en m/s?

  Según las unidades y el contexto, el paso promedio es el tiempo que demora en recorrer un kilómetro. Así, la velocidad promedio es:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{1\text{km}}{\underbrace{240\text{s}}} = \frac{1000\text{m}}{240\text{s}} \approx 4{,}17\text{m/s}$$

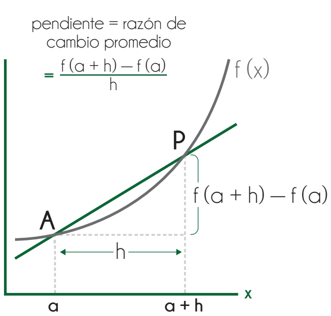
4 min = 4 x 60 segundos

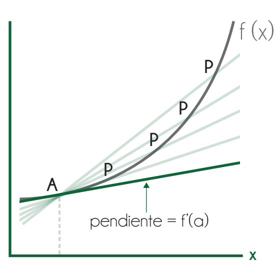
3 **Interpreta la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f(x) en un punto A = (a, f (a))** como el límite de las pendientes de las rectas secantes entre el punto A y puntos sobre la gráfica que se acercan a A. Es decir, como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Utiliza esto para estimar la razón de cambio instantánea f'(a) para un valor particular de a.

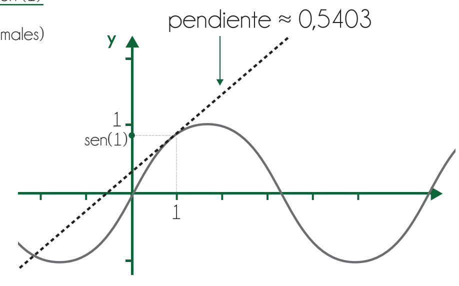
$$\text{razón de cambio instantánea de f en a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{pendiente de la tangente en A}$$





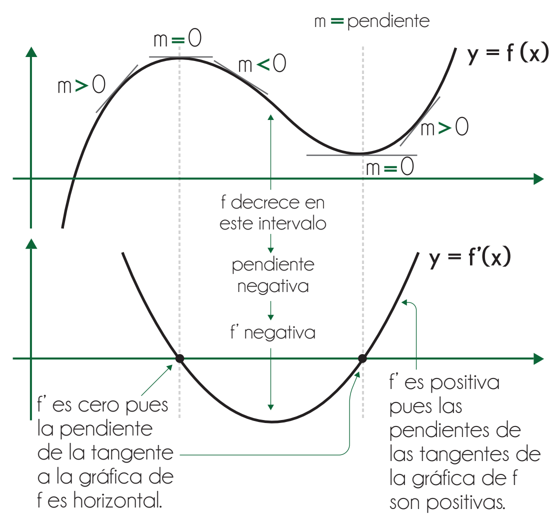
Por ejemplo: estima el valor de la derivada de sen (x) en x =1

h	$\frac{\text{sen}(1+h) - \text{sen}(1)}{h}$ (4 cifras decimales)
-1	0,8415
-0,1	0,5814
-0,01	0,5445
-0,001	0,5407
-0,0001	0,5403
-0,00001	0,5403
0,00001	0,5403
0,0001	0,5403
0,001	0,5399
0,01	0,5361
0,1	0,4974



La tabla parece indicar que la derivada de sen (x) en x = 1 es aproximadamente igual a 0,5403.

4 **Reconoce la derivada de una función como la función de razón de cambio instantáneo.** Dada la gráfica de una función, dibuja de manera aproximada la gráfica de la derivada, identificando claramente los ceros de la derivada y los intervalos donde ésta es negativa y positiva. Por ejemplo:



5 **Conoce las fórmulas de las derivadas de funciones polinomiales, trigonométricas, potencias, exponenciales y logarítmicas y las utiliza para resolver problemas.** Por ejemplo, ¿Cuál es el radio de un círculo cuándo su área crece a una razón instantánea de 20cm^2/cm?

$$A = \pi r^2 \longrightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

Si dA/dr = 20cm^2/cm entonces 2π r = 20, lo cual quiere decir que r = 3,18cm. Es decir, cuando r es aproximadamente 3,18cm el área del círculo crece a una razón (instantánea) de 20cm^2 de área por cada centímetro que crece el radio.

La razón de cambio instantáneo del área es mayor cuando es mayor el radio. Es decir, entre mayor es el radio del círculo, mayor es el cambio en el área al incrementar el radio un centímetro.

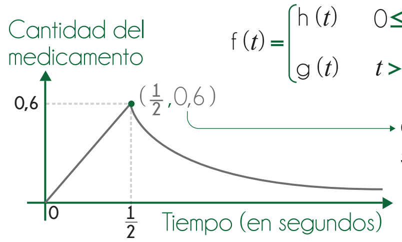
MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

6 **Modela situaciones haciendo uso de funciones definidas a trozos.** Por ejemplo: Una dosis de 0,6ml se inyecta a un paciente durante medio segundo a una tasa constante. Al final de este tiempo, la cantidad C de droga en el paciente comienza a decaer a una tasa de 2% por segundo.

Escribe una función que modela la cantidad de droga en el cuerpo del paciente luego de *t* segundos.

La función f(*t*) que modela la situación es una función a trozos. Cuando $t \in [0\ ,\ ½]$ se comporta como una **función lineal** h(*t*) y cuando $t > ½$ se comporta como una **función exponencial** decreciente g(*t*).



$$f(t) = \begin{cases} h(t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(t) & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

← función lineal

← función exponencial

Cuando han transcurrido $\frac{1}{2}$ s se han suministrado 0,6 ml

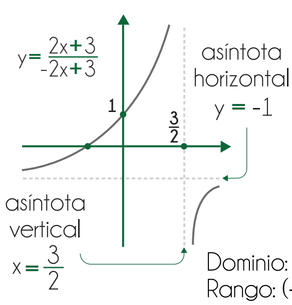
Para la función h (*t*) tenemos los puntos (0,0) y (½ , 0,6), con ellos encontramos que su pendiente es 1,2 ml/s y su corte con el eje vertical en 0. Entonces: h(*t*) = 1,2*t*

Para la función exponencial tenemos que $g(t) = ka^t$ y como la cantidad de droga decrece a una tasa 2% por segundo, tenemos que a = 1 – 0,02 = 0,98 (reducir en 2% cada segundo corresponde a multiplicar por 0,98 cada segundo).

Así, $g(t) = k(0{,}98)^t$. Para averiguar k, reemplazamos en la fórmula anterior los valores de *t* y g(*t*) en el punto (½ , 0,6) y se obtiene que $k = 0{,}6/\sqrt{0{,}98} \approx 0{,}61$. Entonces: $g(t) = 0{,}61(0{,}98)^t$

$$f(t) = \begin{cases} 1{,}2\,t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0{,}61\,(0{,}98)^t & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

7 **Analiza algebraicamente funciones racionales y encuentra su dominio y sus asíntotas.** Por ejemplo:



- $y = \frac{2x+3}{-2x+3}$ se comporta para valores grandes de x como la función:

$$y \approx \frac{2x}{-2x} = \frac{2}{-2} = -1$$ asíntota horizontal

- $y = \frac{2x+3}{\boxed{-2x+3}}$ no puede ser 0

$$-2x+3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$ asíntota vertical

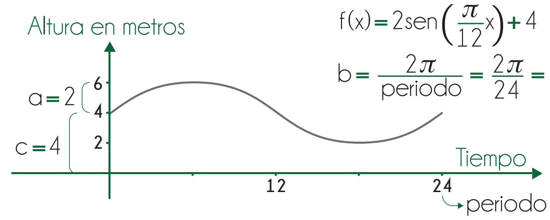
Dominio: (-∞, 3/2) U (3/2, ∞)

Rango: (- ∞, -1) U (-1, ∞)

8 **Reconoce las propiedades básicas que diferencian las familias de funciones exponenciales, lineales, logarítmicas, polinómicas, etc., e identifica cuáles puede utilizar para modelar situaciones específicas.** Por ejemplo:

- **Utiliza la familia de funciones f(x) = a sen(bx)+c para modelar fenómenos periódicos reconociendo las nociones de periodo, frecuencia y amplitud.**

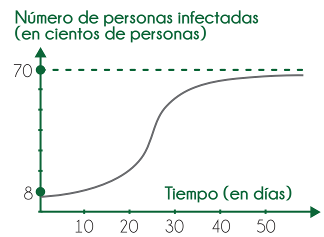
  El nivel de agua que se recolecta en un tanque oscila de forma sinusoidal cada 24 horas. Si la altura mínima es de 2m y la máxima es de 6m, ¿cuál es una posible fórmula para encontrar el nivel de agua en función del tiempo en horas?



$$f(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 4$$

$$b = \frac{2\pi}{\text{periodo}} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$

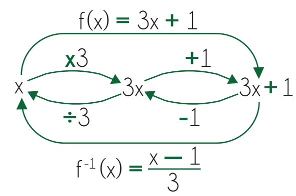
- La gráfica que aparece a continuación, muestra la cantidad de personas infectadas por un virus:

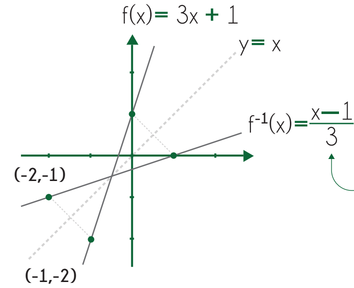


Como el número de personas infectadas parece estabilizarse, la relación entre la cantidad el número de personas infectadas y el tiempo transcurrido no se puede modelar con una función polinómica pues éstas crecen o decrecen indefinidamente y esto no se ajusta a la situación real.

9 **Reconoce cuándo una función tiene o no una función inversa.** Determina la inversa de una función f(x) en un intervalo en el cual es invertible y la reconoce como el proceso de revertir las operaciones que llevan de x a f(x). Por ejemplo:

- Halla la inversa de la función f(x) = 3x + 1.
  Para llegar de x a f(x) primero se multiplica por 3, luego suma 1. Por lo tanto, para revertir el proceso, primero se resta 1, luego se divide por 3.



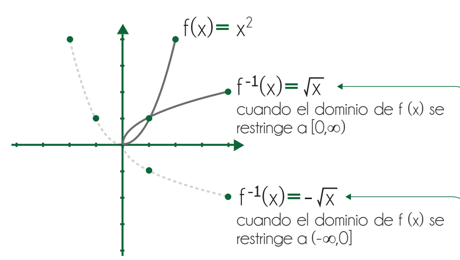


$$y = 3x + 1$$

$$y - 1 = 3x$$

$$\frac{y-1}{3} = x$$

- $f(x) = x^2$ no es invertible en todos los reales, pero sí lo es por ejemplo en el intervalo $[0,\infty)$



$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x|$$

si $x \geq 0$

$$\sqrt{y} = x$$

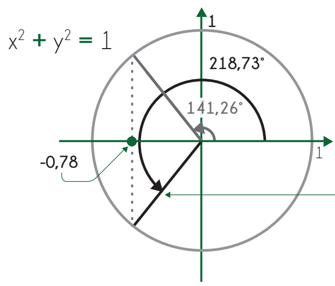
si $x \leq 0$

$$\sqrt{y} = -x$$

$$-\sqrt{y} = x$$

10 **Conoce las funciones trigonométricas inversas (arcoseno, arcocoseno y arcotangente) junto con sus gráficas, dominio y rango.** Comprende que para definir las funciones trigonométricas inversas es necesario restringir el dominio de las funciones trigonométricas. Así mismo, conoce la selección de dominio y rango utilizada mundialmente. Utiliza esta comprensión para encontrar otros ángulos con el mismo seno, coseno o tangente aparte del valor que da la calculadora.

Soluciona ecuaciones trigonométricas simples en un intervalo dado (utilizando calculadoras, las gráficas relacionadas, o el círculo unitario). Por ejemplo, soluciona la ecuación $\cos(\alpha) = -0{,}78$



Hay infinitas soluciones:

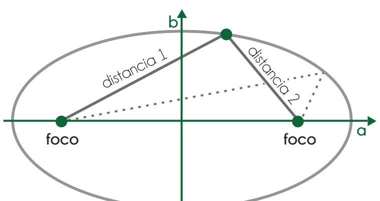
$\cos(\alpha) = -0{,}78$

$\alpha = \cos^{-1}(-0{,}78)$

$\alpha \approx 141{,}26^\circ$ respuesta de la calculadora

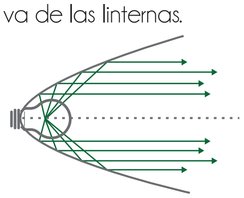
$\alpha \approx 218{,}73^\circ$ otra solución

11 **Conoce las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas) en el plano y las utiliza para encontrar las ecuaciones generales de este tipo de curvas.** Por ejemplo, una elipse es el conjunto de puntos cuya distancia a un foco más la distancia al otro foco es siempre la misma.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Conoce algunas aplicaciones de las curvas cónicas. Por ejemplo: las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas con el sol en uno de sus focos. Las parábolas se utilizan para crear la parte reflectiva de las linternas.

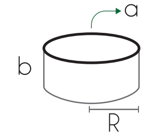


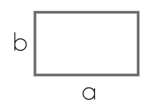
Todos los rayos de luz que emanan del foco, salen paralelos al eje de simetría al reflejarse sobre la parábola.

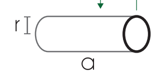
12 **Utiliza los sistemas de coordenadas espaciales cartesiano y esférico para especificar la localización de objetos en el espacio.** Por ejemplo, tomando como centro de sistema de coordenadas el cruce de las diagonales del piso de su salón de clase, determina cuáles serían las coordenadas del bombillo de la clase usando por lo menos dos sistemas de coordenadas y justifica la respuesta.

13 **Razona geométrica y algebraicamente para resolver problemas y para encontrar fórmulas que relacionan magnitudes en diversos contextos.** Por ejemplo:

- ¿Cuál de los dos cilindros que se pueden formar a partir de una hoja rectangular tiene mayor volumen?







$a = 2\pi R \longrightarrow R = \frac{a}{2\pi}$

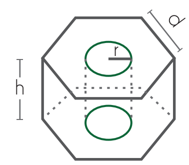
$$V_1 = \pi R^2 \times b = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \times b = \frac{a^2 b}{4\pi} = a \times \frac{ab}{4\pi}$$

$b = 2\pi r \longrightarrow r = \frac{b}{2\pi}$

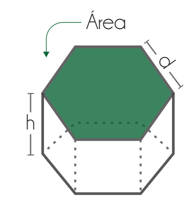
$$V_2 = \pi r^2 \times a = \pi\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \times a = \frac{b^2 a}{4\pi} = b \times \frac{ab}{4\pi}$$

Conclusión: si $a > b$ entonces $V_1 > V_2$

- Encuentra la fórmula para el volumen de una tuerca hexagonal con lado d y orificio interno de radio r.

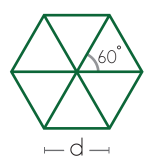


Volumen tuerca = Volumen del prisma hexágonal – Volumen del orificio cilíndrico



Volumen del prisma = Área del hexágono x altura

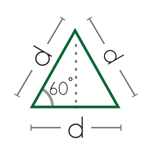
Los triángulos son equiláteros porque son isósceles y el ángulo interno mide 60° (lo cual implica que los otros dos también miden 60°)



Área del hexágono = 6 x Área del triángulo equilátero de lado d

por el teorema de Pitágoras

$$\text{altura} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3d^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$$



$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{d \times \frac{\sqrt{3}}{2} d}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2$$

Así, $\text{Área hexágono} = 6 \times \frac{\sqrt{3}d^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2$

$$\text{Volumen prisma hexagonal} = \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 \times h \qquad \text{Volumen tuerca} = \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 \times h - \pi r^2 h$$

Utiliza y contrasta diversas estrategias para modelar y resolver un problema y justifica su solución.

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

14 **Utiliza nociones básicas relacionadas con el manejo y recolección de información como población, muestra y muestreo aleatorio.** Por ejemplo, realiza una muestra aleatoria en su escuela para determinar quién será el ganador de un premio que se otorgará a un estudiante escogido por los alumnos de los grados 8 a 11. Parte de que las inferencias sobre la población (que en este caso son los alumnos de los grados 8 a 11) sólo son válidas si la muestra es representativa y tiene en cuenta las siguientes preguntas: ¿Cómo elegir estudiantes de cada grado de manera aleatoria y cuántos elegir? ¿Qué gráficas va a realizar para visualizar los resultados? ¿Qué herramientas va a usar para analizarlos y hacer predicciones?

15 **Conoce el significado de la probabilidad condicional y su relación con la probabilidad de la intersección: P(A/B) = P(A∩B) / P(B). Utiliza la probabilidad condicional para hacer inferencias sobre muestras aleatorias.** Por ejemplo: Realiza una encuesta a una muestra de estudiantes en los grados 10 y 11 de su escuela y recolecta información sobre su grado y su materia favorita entre español y matemáticas:

	Grado 10	Grado 11	Total
Español	6	8	14
Matemáticas	6	5	11
Total	12	13	25

A partir de estos datos, determina la **probabilidad condicional** de que un estudiante tomado al azar (no necesariamente perteneciente a la muestra), cuya materia preferida es matemáticas, esté en décimo grado.

A: Materia preferida matemáticas. $P(A) = 11/25$

B: Grado 10 $P(B) = 12/25$

6 → $P(A \cap B) = 6/25$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{6/25}{11/25} = \frac{6}{11} \approx 54{,}5\%$$

La probabilidad de que esté en décimo grado dado que su materia preferida es matemáticas es 54,5%.

16 **Determina si dos eventos son dependientes o independientes utilizando la noción de probabilidad condicional.** Por ejemplo: Para evaluar la efectividad de un pesticida se hace un estudio de su efectividad en un cultivo de 900 plantas. A un tercio de estas (300 plantas) se las trata con el pesticida, y al resto se deja sin tratamiento. Al cabo del estudio se recolectan los siguientes resultados:

	Recibió tratamiento	No recibió tratamiento	Total
Infestada	60	120	180
No infestada	240	480	720
Total	300	600	900

Según el estudio, ¿el pesticida fue efectivo?
Para decidir si el pesticida fue efectivo define los eventos:

A: la planta fue infestada.

B: la planta recibió tratamiento.

Según la tabla:

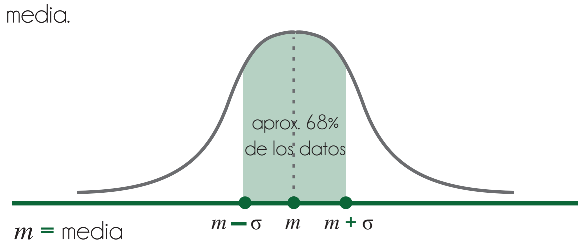
- $P(A) = \frac{180}{900} = \frac{1}{5}$

60 → $P(A\cap B) = \frac{60}{900} = \frac{1}{15}$

- $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1/15}{1/15} = \frac{1}{3}$

Como P(B|A) = P(B), concluye que los eventos A y B son **independientes** (pues la ocurrencia de uno no influye en la ocurrencia del otro). Afirma que el estudio indica que el pesticida no fue efectivo.

17 **Reconoce la desviación estándar como una medida de dispersión de un conjunto de datos.** En particular, para datos que tienen una distribución aproximadamente simétrica (en "forma de campana"), conoce el hecho de que alrededor del 68% de los datos se encuentra a menos de una desviación estándar de la media (promedio) y casi la totalidad de los datos se encuentran a menos de dos desviaciones estándar de la media.



m = media

σ = desviación estándar

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN